Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 5.3. L'ENVELOPPE COMPLEXE D'UN GROUPE COMPACT
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

5.3. L'ENVELOPPE COMPLEXE D'UN GROUPE COMPACT

Soit K un groupe compact. Soit $L_{\mathbf{C}}$ la catégorie des représentations linéaires *complexes* continues de rang fini de K. Cette catégorie est saturée (le corps de base étant maintenant $\mathbf{C}$). Nous noterons $G_{/\mathbf{C}}$ et $C_{/\mathbf{C}}$ le schéma en groupes et la bigèbre correspondants, et nous dirons que $G_{/\mathbf{C}}$ est *l'enveloppe complexe* de K. D'après le n° 4.3, une fonction complexe f sur K appartient à $C_{/\mathbf{C}}$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes:

a′) Les translatées de f engendrent un espace vectoriel de rang fini.

b′) f est continue.

En comparant avec les conditions a) et b) du n° 5.2, on voit que cela signifie que la partie réelle et la partie imaginaire de f appartiennent à la bigèbre C de G. On a donc

$$C_{/\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} C$$

et le groupe $G_{/\mathbf{C}}$ est le *schéma en groupes déduit de* G *par extension des scalaires de* $\mathbf{R}$ *à* $\mathbf{C}$. En particulier, le groupe $G_{/\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ de ses points complexes peut être identifié à $G(\mathbf{C})$.

Noter que la conjugaison complexe définit une *involution* $g \mapsto \bar{g}$ de $G(\mathbf{C})$, dont l'ensemble des invariants est $G(\mathbf{R}) = K$. Plus précisément:

THÉORÈME 2. *Supposons que* K *soit un groupe de Lie compact, et soit* $\mathfrak{k}$ *son algèbre de Lie. Alors* $g \mapsto \bar{g}$ *est une involution de Cartan forte* (cf. réd. n° 517) *du groupe de Lie* $G(\mathbf{C})$. *Les facteurs de la décomposition de Cartan correspondante sont* K *et* $P = \exp(i\mathfrak{k})$, *de sorte que* $G(\mathbf{C}) = K.P$.

Démonstration

a) On va d'abord vérifier le th. 2 dans le cas particulier du groupe *orthogonal* $G_1 = \mathbf{O}_n$. On a $G_1(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, $G_1(\mathbf{C}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{C})$, et l'on sait que $g \mapsto \bar{g}$ est une décomposition de Cartan forte de $\mathbf{O}_n(\mathbf{C})$ dont l'ensemble des invariants est $K_1 = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Cette décomposition montre en même temps que K_1 est dense dans $\mathbf{O}_n(\mathbf{C})$ pour la topologie de Zariski, donc que $\mathbf{O}_n$ est l'enveloppe de K_1.

b) Passons au cas général. On choisit un plongement de K dans un groupe orthogonal $K_1 = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$; l'enveloppe G de K s'identifie alors à un sous-groupe algébrique de $\mathbf{O}_n$, à savoir l'*adhérence* de K (pour la topologie de Zariski). Le groupe $G(\mathbf{C})$ est donc un sous-groupe de $G_1(\mathbf{C})$, stable par l'involution de Cartan considérée. Comme c'est un sous-groupe «de type

algébrique», il en résulte (cf. réd. 517, p. 48, prop. 3) que la restriction de $g \mapsto \bar{g}$ à ce sous-groupe est bien une décomposition de Cartan forte. On sait déjà que le sous-groupe de ses invariants est K. D'autre part, l'algèbre de Lie de $G(\mathbf{C})$ est $\mathbf{C} \otimes \mathfrak{k}$, et l'automorphisme de $\mathbf{C} \otimes \mathfrak{k}$ induit par $g \mapsto \bar{g}$ est la conjugaison complexe; on en déduit que le facteur P correspondant est bien $\exp(i\mathfrak{k})$, c.q.f.d.

Remarques

1) Lorsque K est un groupe compact quelconque, on peut l'écrire comme limite projective de groupes de Lie compacts K_α, et l'on a $G(\mathbf{C}) = \varprojlim G_\alpha(\mathbf{C})$, avec des notations évidentes. D'après le th. 2, chaque $G_\alpha(\mathbf{C})$ a une décomposition de Cartan $K_\alpha . P_\alpha$, avec $P_\alpha = \exp(i\mathfrak{k}_\alpha)$. Finalement, on obtient une décomposition de $G(\mathbf{C})$ sous la forme $G(\mathbf{C}) = K . \exp(i\mathfrak{k})$, en notant $\mathfrak{k}$ la limite projective des $\mathfrak{k}_\alpha$.

[Cette décomposition ne semble présenter aucun intérêt en dehors du cas où K est un groupe de Lie. Noter que $G(\mathbf{C})$ n'est même pas localement compact, si $\dim(K) = \infty$.]

2) A la place du groupe $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, on aurait pu utiliser le groupe unitaire $\mathbf{U}_n(\mathbf{C})$, plus traditionnel. Toutefois, il aurait fallu expliquer comment on considère $\mathbf{U}_n$ comme un groupe algébrique sur $\mathbf{R}$, et pourquoi $\mathbf{U}_{n/\mathbf{C}}$ s'identifie à $\mathbf{GL}_{n/\mathbf{C}}$.

THÉORÈME 3. *Les hypothèses étant celles du th. 2, soit X un groupe de Lie complexe, et soit f un homomorphisme continu de K dans X. Il existe alors un homomorphisme $F: G(\mathbf{C}) \to X$ de groupes de Lie complexes, et un seul, qui prolonge f.*

Soit $K_\mathbf{C}$ le groupe de Lie *complexifié* de K, au sens de la rédaction 515, §6, n° 10 [il faut modifier la rédaction en question, car elle suppose, bien inutilement, que le groupe de Lie réel dont on part est *connexe*]. On a un homomorphisme canonique $\pi: K_C \to G(\mathbf{C})$, et le th. 3 équivaut à dire que π est un *isomorphisme.*

Il est clair en tout cas que π est surjectif; d'autre part, on sait *(loc. cit.)* que l'algèbre de Lie de $K_\mathbf{C}$ est engendrée sur $\mathbf{C}$ par $\mathfrak{k}$; puisque celle de $G(\mathbf{C})$ est $\mathfrak{k} \otimes \mathbf{C}$, on en conclut que π est un revêtement. Ce revêtement admet une section canonique $G(\mathbf{C}) = K . P \to K_\mathbf{C}$ définie par $x . \exp(it) \mapsto x' . \exp(it')$ où x désigne un élément de K, x' son image par $K \to K_\mathbf{C}$, t désigne un élément de $i\mathfrak{k}$ et t' son image par l'application tangente à $K \to K_\mathbf{C}$. L'image de cette section est $K' . P'$, avec des notations évidentes; c'est une réunion de composantes connexes de $K_\mathbf{C}$. De plus, c'est un *sous-groupe* en vertu du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit A un groupe topologique, soit B un sous-groupe de A, et soit C la réunion des composantes connexes de A qui rencontrent B. Alors C est un sous-groupe de A.*

Si $x, y \in C$, il existe des parties connexes X, Y de A qui rencontrent B et sont telles que $x \in X, y \in Y$. Alors $X.Y^{-1}$ est une partie connexe de A rencontrant B et contenant xy^{-1}; on a donc $xy^{-1} \in C$, ce qui prouve bien que C est un sous-groupe.

Le théorème 3 est maintenant évident. En effet, on vient de voir que $K'.P'$ est un sous-groupe ouvert de $K_{\mathbf{C}}$; comme il contient K', il est nécessairement égal à $K_{\mathbf{C}}$ et la projection π est bien un isomorphisme.

Exemple. Prenons pour K le cercle $\mathbf{S}_1$, de sorte que $G(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$. Soit H un groupe de Lie complexe compact connexe de dimension 1 [d'aucuns appellent ça une *courbe elliptique*]; en tant que groupe de Lie réel, H est un tore de dimension 2. Choisissons un plongement f de $\mathbf{S}_1$ dans H. D'après le th. 3, f se prolonge en un *homomorphisme* $F: \mathbf{C}^* \to H$. Il est immédiat que F est un *revêtement,* et que son noyau est formé des puissances d'un élément $q \in \mathbf{C}^*$, avec $|q| < 1$; on peut donc identifier H à $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ [Tate devrait être content].

Si K est un groupe de Lie compact, il est clair que son enveloppe G est un *groupe réductif* (puisque toutes ses représentations linéaires sont semi-simples), donc $G_{/\mathbf{C}}$ est un groupe réductif complexe. Inversement:

THÉORÈME 4. *Soit H un groupe algébrique linéaire complexe réductif, et soit K un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbf{C})$. L'enveloppe complexe de K s'identifie à H.*

Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, et soit $\mathfrak{k}$ celle de K. *On va d'abord prouver que* $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, et qu'il existe une *décomposition de Cartan* de $H(\mathbf{C})$ dont les facteurs sont K et $\exp(i\mathfrak{k})$.

Il suffit de le faire lorsque H est connexe, puis (quitte à passer à un revêtement) lorsque H est, soit un tore, soit un groupe semi-simple. Le premier cas est trivial. Le second a été traité dans la rédaction 517, § 3 (en se ramenant au cas adjoint et en utilisant l'existence d'une forme réelle de $\mathfrak{h}$ dont la forme de Killing est négative).

Ceci étant, si G est l'enveloppe complexe de K, il est clair que le morphisme canonique $G \to H$ donne lieu à un homomorphisme $G(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{C})$ qui est un *isomorphisme.* C'est donc un isomorphisme.

Remarque. Le th. 4 équivaut à dire que l'*enveloppe* de K est une «forme réelle» anisotrope de H. Il y a donc correspondance bijective entre:

— sous-groupes compacts maximaux de $H(\mathbf{C})$,

— formes réelles anisotropes de H.

En particulier, ces dernières sont *conjuguées entre elles* par les éléments de $H(\mathbf{C})$ (et même par ceux de $H^o(\mathbf{C})$, H^o désignant la composante neutre de H).

5.4. Retour aux groupes anisotropes

Proposition 7. *Soit G un groupe algébrique linéaire réel anisotrope, et soit H un sous-groupe algébrique de G. Soit $V = G/H$ l'espace homogène correspondant* (au sens algébrique). *Alors:*

a) *H est anisotrope.*

b) *L'application canonique $G(\mathbf{R}) \to V(\mathbf{R})$ est surjective* (de sorte qu'on peut identifier $V(\mathbf{R})$ à $G(\mathbf{R})/H(\mathbf{R})$).

c) *Si H est distingué, le groupe quotient G/H est anisotrope.*

La conjugaison de Cartan $g \mapsto \bar{g}$ du th. 2 laisse évidemment stable le sous-groupe $H(\mathbf{C})$ de $G(\mathbf{C})$. Comme $H(\mathbf{C})$ est «de type algébrique», on en conclut que $H(\mathbf{C})$ admet lui-même une décomposition de Cartan $K.P$, où $K = H(\mathbf{C}) \cap G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R})$. Mais alors il est clair que l'adhérence de K pour la topologie de Zariski de H est H tout entier. Cela montre que H est anisotrope, d'où a).

Soit maintenant $v \in V(\mathbf{R})$; soit $g \in G(\mathbf{C})$ un élément dont l'image dans $V(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})/H(\mathbf{C})$ est v. On a $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$. Soit $K_1.P_1$ la décomposition de Cartan de $G(\mathbf{C})$ utilisée plus haut, et écrivons g sous la forme $g = k_1p_1$, avec $k_1 \in K_1$, $p_1 \in P_1$. L'hypothèse $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$ signifie qu'il existe $k \in K$ et $p \in P$ tels que $g = \bar{g}kp$, i.e. $k_1p_1 = k_1p_1^{-1}kp$, d'où $p_1^2 = kp$, ce qui entraîne $k = 1$, $p = p_1^2$. Comme P est stable par extraction de racines carrées, on a $p_1 \in P$. On en conclut que $g \equiv k_1 \bmod H(\mathbf{C})$, donc que v est l'image de l'élément $k_1 \in G(\mathbf{R})$, ce qui prouve b).

Enfin, si H est distingué, il est clair que l'image de K_1 dans (G/H) $(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de G/H; or cette image est un compact, d'où etc.

[Le rédacteur ne voit pas comment démontrer que H est anisotrope sans utiliser les décompositions de Cartan — sauf, bien sûr, dans le cas où H est connexe, qui est trivial.]