5.5. Groupes de Lie complexes réductifs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5.5. Groupes de Lie complexes réductifs

Théorème 5. *Soient H un groupe de Lie complexe, H^o sa composante neutre et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H/H^o est fini; $\mathfrak{h}$ est réductive; la composante neutre du centre de H^o est isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{C}^*$.*

(ii) *H/H^o est fini; toute représentation linéaire complexe de H est semi-simple; il existe une telle représentation qui est fidèle.*

(iii) *H/H^o est fini; si K est un sous-groupe compact maximal de H, et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.*

(iv) *Il existe un groupe de Lie compact K tel que H soit isomorphe au complexifié de K.*

(v) *Il existe un groupe algébrique linéaire sur $\mathbf{C}$ qui est réductif, et dont le groupe des points est isomorphe à H* (comme groupe de Lie complexe).

Démonstration. L'équivalence (iv) $\Leftrightarrow$ (v) résulte des ths. 3 et 4. Le fait que (iv) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la décomposition de Cartan de H. Inversement, supposons (iii) vérifiée, soit G l'enveloppe de K, et soit $G(\mathbf{C})$ le complexifié de K. L'injection $K \to H$ se prolonge en un morphisme $f: G(\mathbf{C}) \to H$ de groupes de Lie complexes. Vu que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, f est un isomorphisme local. De plus, K est un sous-groupe compact maximal à la fois de $G(\mathbf{C})$ et de H et la restriction de f à K est l'identité (modulo les identifications faites). Cela entraîne que f est un isomorphisme, en vertu du lemme suivant:

Lemme 4. *Soit $f: A \to B$ un homomorphisme de groupes de Lie réels. On suppose:*

a) *que f est un isomorphisme local;*

b) *que A et B ont un nombre fini de composantes connexes;*

c) *qu'il existe un sous-groupe compact maximal K_A* (resp. K_B) *de A* (resp. de B) *tel que la restriction de f à K_A soit un isomorphisme de K_A sur K_B.*

Alors f est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 4. On sait que B possède une *décomposition multiexponentielle* $B = K_B . \exp(p_1) \dots \exp(p_n)$, où les p_i sont des sous-espaces vectoriels de l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de B. Cela permet de définir une *section* $h: B \to A$ par

$$k . \exp(t_1) \dots \exp(t_n) \mapsto k' . \exp(t'_1) \dots \exp(t'_n)$$

où k' désigne l'image réciproque de k dans K_A et $t'_1, \ldots, t'_n$ les éléments de l'algèbre de Lie de A relevant $t_1, \ldots, t_n$. L'image de h est une réunion de composantes connexes de A; comme elle contient K_A, c'est A tout entier; d'où le lemme.

On a donc prouvé l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

L'implication (v) $\Rightarrow$ (i) est immédiate: on sait en effet que tout groupe réductif connexe est extension d'un groupe semi-simple par un groupe de type multiplicatif. Inversement, montrons que (i) $\Rightarrow$ (iii) (ce qui prouvera que (i) est équivalent à (iii), (iv), (v)). On peut supposer H connexe. Si Z désigne la composante neutre du centre de H, et S son groupe dérivé, $S \cap Z$ est un groupe discret, qui est le centre de S. Or on a:

LEMME 5. *Le centre d'un groupe de Lie complexe, connexe, d'algèbre de Lie semi-simple, est fini.*

Il suffit de voir que le groupe fondamental du groupe adjoint est fini. Or le groupe adjoint admet une décomposition de Cartan $K.P$, avec K compact semi-simple connexe (cf. rédaction numéro 517); son groupe fondamental est le même que celui de K, et ce dernier est fini d'après un théorème bien connu d'*Int.* (chap. VII, §3, prop. 5).

Ceci étant, on voit que $S \cap Z$ est fini, donc que H admet pour *revêtement fini* le produit $S \times Z$. Pour vérifier que H jouit de la propriété (iii), il suffit de le faire pour son revêtement $S \times Z$, c'est-à-dire pour S et pour Z. Le cas de Z est trivial (puisqu'on l'a supposé isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$); pour S, on remarque que, d'après le lemme 5, son centre est fini, et l'on est ramené au cas du *groupe adjoint*; mais ce dernier est évidemment «algébrique», i.e. vérifie (v), donc aussi (iii).

Reste à démontrer que (ii) est équivalente aux quatre autres propriétés. Tout d'abord, on a (iv) $\Rightarrow$ (ii); en effet, si H est le complexifié de K, et si E est une représentation linéaire complexe de H, les sous-espaces de E stables par K le sont aussi par H, ce qui montre que E est semi-simple; de même, le fait que K ait une représentation linéaire fidèle montre que H en possède une.

Enfin, supposons (ii) vérifiée. L'existence d'une représentation semi-simple et fidèle de H montre que $\mathfrak{h}$ est réductive (car la représentation de $\mathfrak{h}$ correspondante est aussi semi-simple et fidèle). D'autre part, H^o vérifie aussi (ii) (le seul point non évident est que toute représentation linéaire ρ de H^o soit semi-simple; cela se voit en remarquant que la représentation linéaire *induite* (au sens Frobenius!) de ρ est semi-simple). Si Z désigne la composante neutre du centre de H et S le groupe dérivé de H, on voit comme ci-dessus que $S \cap Z$

est un groupe *fini* F. On a un homomorphisme surjectif $H \to Z/F$; le groupe Z/F est donc un groupe commutatif, connexe, dont toutes les représentations linéaires sont semi-simples; de plus, Z possède une représentation linéaire fidèle. Il en résulte facilement (cf. exercice 5) que Z est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$. On a donc (ii) $\Rightarrow$ (i), ce qui achève la démonstration.

[Cette démonstration n'est en fait qu'une simple vérification: tout le travail sérieux a déjà été fait. On devrait pouvoir la présenter plus simplement.]

DÉFINITION 2. *Un groupe de Lie complexe qui vérifie les propriétés équivalentes du th. 5 est dit réductif.*

THÉORÈME 6. *Soit H un groupe de Lie complexe réductif. Soit G son enveloppe complexe* (en tant que groupe de Lie complexe, cf. n° 4.3). *Alors G est un groupe algébrique linéaire complexe réductif* (au sens algébrique) *et l'application canonique $H \to G(\mathbf{C})$ est un isomorphisme.*

Soit K un sous-groupe compact maximal de H; puisque H est le complexifié de K, les représentations linéaires complexes (holomorphes) de H correspondent bijectivement (par restriction) à celles de K. Il s'ensuit que le groupe G en question n'est autre que *l'enveloppe complexe* $G_{K/\mathbf{C}}$ de K, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. *Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques linéaires complexes, et soit $f: G_1(\mathbf{C}) \to G_2(\mathbf{C})$ un homomorphisme de groupes de Lie complexes. Si G_1 est réductif, f est «algébrique»* (i.e. induit par un morphisme $G_1 \to G_2$).

Cela ne fait que traduire le th. 6.

COROLLAIRE 2. *Le foncteur «enveloppe» est une équivalence de la catégorie des groupes de Lie complexes réductifs sur celle des groupes algébriques linéaires réductifs.*

C'est clair.

Remarque. Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$, où G est algébrique linéaire réductif sur $\mathbf{C}$. On peut résumer ce qui précède ainsi: l'algèbre affine de G s'identifie à l'algèbre des fonctions holomorphes sur $G(\mathbf{C})$ dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie; par restriction à K, cette algèbre s'applique isomorphiquement sur l'algèbre des fonctions continues complexes sur K dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

[On obtient ainsi des bigèbres sur **C**; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

EXERCICES

§ 1

1) Soit E un K-module projectif de type fini. On identifie $\mathrm{End}(E)$ à $E \otimes E'$; on note I l'élément de $E \otimes E'$ correspondant à 1_E, et ${}^tI$ son image dans $E' \otimes E$.

On munit $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

a) Si $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$, montrer que $d(x) = a \otimes {}^tI \otimes a'$.

b) On définit une application $d_E : E \to \mathrm{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$ par $a \mapsto a \otimes {}^tI$. Montrer que cette application définit sur E une structure de comodule à gauche sur $\mathrm{End}(E)$.

c) On identifie $\mathrm{End}(E) \otimes \mathrm{End}(E)$ à $\mathrm{End}(E \otimes E)$ par l'application $(u, v) \mapsto u \otimes v$. D'autre part, si on écrit $\mathrm{End}(E \otimes E)$ sous la forme $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$ la permutation des deux facteurs E' définit un automorphisme σ de $\mathrm{End}(E \otimes E)$. Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \mathrm{End}(E) .$$

d) Soit (v_i) une base de E, et soit $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$ la base correspondante de $\mathrm{End}(E)$. Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj} .$$

e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit C une cogèbre plate, et soit E un comodule sur C.

a) Soit V un K-module tel que E soit isomorphe (comme module) à un quotient de E. Montrer qu'il existe un sous-comodule F de $C \otimes V$ tel que E soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de F. (Utiliser le morphisme $C \otimes V \to C \otimes E$ et le fait que E est isomorphe à un sous-comodule de $C \otimes E$.) Montrer que, si K est noethérien, et E de type fini, on peut choisir F de type fini.