Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

Autor: Peyrière, Jacques

Kapitel: II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60419

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PROPOSITION 10. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$, *alors* $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$.

Démonstration. Différentions la relation $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$ et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma) \det(\Phi'_\sigma) = 1 .$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à ± 1.

LEMME 11. *Pour tout* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$, *on a* $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$ *ou* 1.

Démonstration. Il suffit de considérer $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$, *on a* $Q_\sigma = 1$.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE Φ

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyschev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes $\{t_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ et $\{u_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = x t_n(x)$$
$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = x u_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2 , \quad t_1(x) = x , \quad u_0(x) = 0 , \quad u_1(x) = 1 .$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n , \quad d^0 t_n = |n|$$
$$u_{-n} = -u_n , \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$
$$t_n(2\cos\varphi) = 2\cos n\varphi$$
$$u_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$
$$t_n(x) = x u_n(x) - 2u_{n-1}(x) .$$

L'intérêt pour nous de ces polynômes vient du lemme suivant dont la démonstration par récurrence est immédiate.

LEMME 1. *Si* A *est une matrice carrée telle que* $A^2 = xA - 1$, *alors, pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, *on a*

$$A^n = u_n(x)A - u_{n-1}(x)$$

et, si A *est une matrice* 2×2, $\operatorname{tr} A^n = t_n(x)$.

LEMME 2. *Soit* $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \cdots a^{m_k}b^{n_k}$ *un élément de* F. *On suppose que, si* $k > 0$, *on a* $m_1 m_2 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \neq 0$, *(si* $k = 0$, *par convention* $w = e$*). Alors* $d_z^0 P_w = k$, *(où* d_z^0 *désigne le degré par rapport à la variable* z*).*

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur k. Le lemme est vrai pour $k = 0$. Supposons-le vrai pour $k \leqslant l - 1$.

Soit $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \cdots a^{m_l}b^{n_l} = w_1 a^{m_l}b^{n_l}$. On a, si $T\varphi = (x, y, z)$,

$$\varphi(w) = \varphi(w_1)\,[u_{m_l}(x)\,\varphi(a) - u_{m_l-1}(x)]\,[u_{n_l}(y)\,\varphi(b) - u_{n_l-1}(y)]\ .$$

La trace de $\varphi(w)$ est donc combinaison linéaire à coefficients polynômiaux en x et y des traces de $\varphi(w_1 ab)$, $\varphi(w_1 a)$, $\varphi(w_1 b)$ et $\varphi(w_1)$. Puisque, pour calculer des traces de produits, on peut opérer des permutations circulaires, l'hypothèse de récurrence montre que les traces de $\varphi(w_1 a)$, $\varphi(w_1 b)$ et $\varphi(w_1)$ ont un degré en z inférieur ou égal à $l - 1$.

Ainsi donc le degré en z du polynôme

$$\operatorname{tr}\varphi(w) - \operatorname{tr}(\varphi(w_1 ab))\,u_{m_l}(x)\,u_{n_l}(y)$$

est strictement inférieur à l.

Répétant le même argument aux autres facteurs de w, on obtient que le degré en z du polynôme

$$\operatorname{tr}\varphi(w) - \operatorname{tr}(\varphi[(ab)^l]) \prod_{j=1}^{l} [u_{m_j}(x)\,u_{n_j}(y)]$$

est au plus $l - 1$.

Mais $\operatorname{tr}\varphi(ab)^l = t_l(z)$ est un polynôme en z de degré l. Ceci achève la démonstration.

LEMME 3. *Si* $w \in F$ *est tel que* $P_w = \alpha z\,(\alpha \in \mathbf{Z})$, *alors* $\alpha = 1$ *et l'on a* $w = uabu^{-1}$ *ou* $w = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$ *pour un* $u \in F$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$, le lemme précédent montre que la réduction cyclique de w est e, a^m ou b^n. Dans aucun de ces cas on obtient $P_w = 0$. Donc $\alpha \neq 0$.

Le lemme précédent montre alors que la réduction cyclique de w est $a^m b^n$ (avec $mn \neq 0$). Alors le lemme 1 montre que l'on a

$$P_w(x, y, z) = u_m(x)u_n(y)z - yu_{m-1}(x)u_n(y) - xu_m(x)u_{n-1}(y) + 2u_{m-1}(x)u_{n-1}(y) .$$

Or $u_m(x)u_n(y) = \alpha$ implique $|m| = |n| = 1$ et $\alpha = mn$. Si $mn = -1$, alors l'un des deux termes $yu_{m-1}(x)u_n(y)$ ou $xu_m(x)u_{n-1}(y)$ reste seul, ce qui est impossible. Donc $m = n = \pm 1$, d'où le lemme.

LEMME 4. *Soit* $w \in F$. *Alors*

1°) *Si* $P_w = \alpha x$, *on a* $\alpha = 1$ *et* $w = uau^{-1}$ *ou* $w = ua^{-1}u^{-1}$.

2°) *Si* $P_w = \alpha y$, *on a* $\alpha = 1$ *et* $w = ubu^{-1}$ *ou* $w = ub^{-1}u^{-1}$.

Démonstration. Supposons que l'on ait $P_w = \alpha x$. Considérons l'élément $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ ainsi défini: $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = b^{-1}$. On a $\Phi_\sigma(x, y, z) = (z, y, x)$, donc, en vertu de la proposition I.3, on a $P_{\sigma(w)}(x, y, z) = P_w \circ \Phi_\sigma(x, y, z) = \alpha z$. On en déduit (lemme précédent) que $\alpha = 1$ et que $\sigma(w) = uabu^{-1}$ ou $\sigma(w) = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$. Mais σ est un isomorphisme: $\sigma^{-1}(a) = ab$, $\sigma^{-1}(b) = b^{-1}$. On a donc $w = \sigma^{-1}(u)a\sigma^{-1}(u^{-1})$ ou $w = \sigma^{-1}(u)b^{-1}a^{-1}b\sigma^{-1}(u^{-1})$.

Pour démontrer la seconde assertion, on utilise de la même façon l'isomorphisme (a^{-1}, ab).

THÉORÈME 5. *Pour* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ *les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1°) $\Phi_\sigma = \mathrm{id}$

2°) σ *est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec l'involution* (a^{-1}, b^{-1}).

Démonstration. Il est clair que la seconde propriété implique la première. Supposons que l'on ait $\Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il résulte du lemme précédent que l'on a

$$\sigma(a) = ua^\varepsilon u^{-1} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ et } u \in F$$

et

$$\sigma(b) = vb^\eta v^{-1} \quad \text{avec} \quad \eta = \pm 1 \text{ et } v \in F .$$

On sait par ailleurs (proposition I.9) que λ divise $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$. Comme $P_{\sigma(ab)} = z$ et $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$ on a $\varepsilon = \eta$. Quitte à composer avec l'involution (a^{-1}, b^{-1}), on peut supposer que l'on a $\varepsilon = \eta = 1$.

Supposons que les mots uau^{-1} et vbv^{-1} soient réduits. Si $u = v = e$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $|u| \geqslant |v|$ (où $|u|$ désigne la longueur de u). On a alors $u = u'b^n$ avec $n \neq 0$, la dernière lettre de u' étant a, si $|u'| > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n}u'^{-1}vbv^{-1}u'b^n)} .$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que $u'^{-1}v = b^k$. L'irréductibilité de vbv^{-1} implique alors $u' = v$. Ceci montre que σ est un automorphisme intérieur.

III. Applications polynomiales laissant λ invariant Caractérisation des σ tels que $Q_\sigma = 1$

On désigne par R un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\psi \in (R[x, y, z])^3$ tels que $\lambda \circ \psi = \lambda$.

L'ensemble $\mathscr{A}$ contient $\{\Phi_\sigma ; \sigma \in \operatorname{aut} F\}$. Il sera commode de considérer les éléments suivants de $\operatorname{aut} F$:

$$\alpha = (b, a) , \quad \beta = (a, b^{-1}) , \quad \gamma = (ab, b^{-1}) .$$

Les Φ correspondants sont

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = (y, x, z)$$
$$\Phi_\beta(x, y, z) = (x, y, xy - z)$$
$$\Phi_\gamma(x, y, z) = (z, y, x) .$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z) .$$

Ces applications polynomiales sont également dans $\mathscr{A}$.

Nous allons montrer que $\mathscr{A}$ est engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \rho$ et θ.