2. Rappels et preuve de la proposition 4

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Rappels et preuve de la proposition 4

Soit G un groupe localement compact, avec élément unité noté e. Dans la suite, on entend par «**représentation**» de G une «représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert complexe». On désigne par 1_G la représentation unité de G dans l'espace de dimension 1.

Soit H un sous-groupe fermé de G. Pour toute représentation π de H, on désigne par $Ind_H^G(\pi)$ la représentation de G induite de π. (Voir ci-dessous les rappels dans la preuve du lemme 4.) Lorsque $\pi = 1_H$, on obtient la représentation quasi-régulière de G associée à l'espace homogène $H\backslash G$; si de plus $H = \{e\}$, on obtient la représentation régulière droite de G, notée ρ_G. Si π et π' sont deux représentations de G, la notation $\pi \prec \pi'$ (respectivement $\pi \sim \pi'$) indique que la représentation π est faiblement contenue dans π' (resp. est faiblement équivalente à π'); pour ces notions, voir [Dix].

Le groupe G est dit **moyennable** si $1_G \prec \rho_G$; il y a de nombreuses autres définitions équivalentes (voir par exemple [Gre] et [Eym]). Un groupe de Lie réel connexe semi-simple est moyennable si et seulement s'il est compact: c'est un résultat qui remonte à Furstenberg [Fur].

Considérons plus particulièrement le cas d'un groupe discret, noté Γ. Si X est une partie de Γ invariante par conjugaison, on introduit l'espace $l^2(X)$ des fonctions $\Gamma \to \mathbf{C}$ de carré sommable à supports dans X et la représentation $\alpha_{\Gamma,X}$ de Γ dans $l^2(X)$ définie par

$$(\alpha_{\Gamma,X}(\gamma)\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1}x\gamma)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$, $\xi \in l^2(X)$ et $x \in X$. Lorsque $X = \Gamma - \{e\}$, on écrit simplement α_Γ. Le groupe Γ est dit **intérieurement moyennable** si $1_\Gamma \prec \alpha_\Gamma$. Il y a plusieurs autres définitions de cette notion [BeH], mais il faut de plus noter que certains auteurs utilisent les mêmes mots pour une notion *distincte* [Pat, page 84].

Rappelons deux des conditions standard suffisantes pour qu'un groupe Γ soit intérieurement moyennable. La première est qu'il possède une classe de conjugaison finie et distincte de $\{e\}$, c'est-à-dire que α_Γ contienne la représentation unité 1_Γ au sens fort. La seconde est que Γ soit moyennable et non réduit à $\{e\}$. (L'argument usuel apparaît dans [Gre, Lemma 1.1.3]; une variante apparaît ci-dessous après le lemme 4.)

Il existe par ailleurs des groupes intérieurement moyennables non moyennables: c'est le cas d'un produit direct $\Gamma_0 \times \Gamma_1$ lorsque Γ_0 est non moyennable et lorsque Γ_1 est moyennable non réduit à un élément.

Toutefois, de nombreux «exemples naturels» de groupes non moyennables sont aussi non intérieurement moyennables, et les résultats de la présente note fournissent des illustrations supplémentaires de ce fait.

Soit Γ_0 un sous-groupe d'indice fini d'un groupe Γ intérieurement moyennable. Il se peut que Γ_0 ne soit *pas* intérieurement moyennable (exemple: $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ avec Γ_1 fini non réduit à un élément). Toutefois, lorsque Γ est de plus cci (ou, en toutes lettres, à classes de conjugaison infinies), on a les lemmes suivants, desquels découle la moyennabilité intérieure de Γ_0 (proposition 4).

Introduisons d'abord quelques notations. On désigne par $l^1(\Gamma)$ l'algèbre de convolution des fonctions sommables de Γ dans $\mathbf{C}$, qui est une algèbre de Banach pour la norme définie par $\| \xi \|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |$. Comme Γ est discret, tout élément $\xi \in l^1(\Gamma)$ possède aussi des normes $\| \xi \|_2 = (\sum_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |^2)^{1/2}$ et $\| \xi \|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |$ qui sont finies. Pour $\xi \in l^1(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$, on définit l'adjoint $\xi^* \in l^1(\Gamma)$ et l'opérateur $\alpha(\gamma)$ sur $l^1(\Gamma)$ par

$$\xi^*(x) = \overline{\xi(x^{-1})}$$
$$(\alpha(\gamma)\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1}x\gamma)$$

pour tout $x \in \Gamma$. On désigne par $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ le convexe de $l^1(\Gamma)$ formé des fonctions ξ à valeurs positives, telles que $\xi(e) = 0$, et de norme $\| \xi \|_1 = 1$.

La moyennabilité intérieure de Γ se traduit [BeH] par l'existence d'une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ qui est asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \| \alpha(\gamma)\xi_n - \xi_n \|_1 = 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

LEMME 1. *Si Γ est intérieurement moyennable et cci, il existe une suite asymptotiquement invariante $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ ayant les propriétés suivantes:*

(i) ξ_n *est à support fini pour tout* $n \geqslant 1$,

(ii) $\lim_{n \to \infty} \| \xi_n \|_\infty = 0$,

(iii) $\lim_{n \to \infty} \| \xi_n \|_2 = 0$.

Preuve. Soit $(\xi''_k)_{k \geqslant 1}$ une suite asymptotiquement invariante de $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$.

Premier pas. Montrons d'abord que, pour tout $x \in \Gamma$ on a $\lim_{k \to \infty} \xi''_k(x) = 0$.

Pour cela, choisissons un entier $c \geqslant 2$. On peut trouver $\gamma_1, \ldots, \gamma_c \in \Gamma$ tels que les éléments $\gamma_1^{-1} x \gamma_1, \ldots, \gamma_c^{-1} x \gamma_c$ sont distincts deux à deux. Il existe aussi un entier k_0 assez grand pour que $\| \alpha(\gamma_j) \xi_k'' - \xi_k'' \|_1 \leqslant c^{-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c\}$ et pour tout $k \geqslant k_0$. Par suite $\xi_k''(\gamma_j^{-1} x \gamma_j) \geqslant \xi_k''(x) - c^{-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c\}$, donc $1 = \| \xi_k'' \|_1 \geqslant c \xi_k''(x) - 1$ et $\xi_k''(x) \leqslant 2c^{-1}$ pour tout $k \geqslant k_0$. L'entier c étant arbitraire, la suite $(\xi_k''(x))_{k \geqslant 1}$ tend bien vers 0.

Deuxième pas. Le sous-ensemble de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ formé des fonctions à supports finis est dense dans $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$. On ne restreint donc pas la généralité de ce qui suit en supposant *a priori* les fonctions ξ_k'' à supports finis. Soit alors $(k_n)_{n \geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} \text{support } (\xi_{k_j}'') \subset \Gamma$$

(c'est une partie finie de Γ) et on note χ_n la fonction caractéristique de S_n.

Montrons que, pour un choix convenable de $(k_n)_{n \geqslant 1}$, on peut définir une suite asymptotique invariante $(\xi_n')_{n \geqslant 1}$ de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ de n-ième terme

$$\xi_n' = (\xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1}) \| \xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1} \|_1^{-1}$$

(avec $\chi_0 = 0$) de telle sorte que les supports des ξ_n' sont alors finis et *disjoints deux à deux.*

On pose $k_1 = 1$, donc $\xi_1' = \xi_1''$, puis on procède par récurrence sur n en supposant $\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}'$ déjà définis. Par le premier pas, on a

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{x \in S_{n-1}} \xi_k''(x) = 0 .$$

On peut choisir $k_n > k_{n-1}$ tel que

$$\sum_{x \in S_{n-1}} \xi_{k_n}''(x) \leqslant \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire tel que $\| \xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1} \|_1 \geqslant \frac{n-1}{n}$. La définition ci-dessus de ξ_n' a donc un sens, et la suite $(\xi_n')_{n \geqslant 1}$ a évidemment les propriétés annoncées.

Troisième pas. Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie à la Cesàro par

$$\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j' .$$

Cette suite satisfait évidemment les conditions (i) et (ii) du lemme (on a même $\| \xi_n \|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$). Comme $\| \xi \|_2^2 \leqslant \| \xi \|_1 \| \xi \|_\infty$ pour tout $\xi \in l^1(\Gamma)$, elle satisfait aussi la condition (iii). $\square$

LEMME 2. *Soit* Γ *un groupe intérieurement moyennable et cci, et soit* $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite asymptotiquement invariante de* $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ *possédant les propriétés du lemme 1. Soit* $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ *la suite définie par* $\eta_n = \xi_n^* \star \xi_n$ *et soit* Γ_0 *un sous-groupe de* Γ *d'indice* $f = [\Gamma : \Gamma_0]$ *fini. Alors*

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{\gamma \in \Gamma_0 - \{e\}} \eta_n(\gamma) \geqslant \frac{1}{f}$$

Preuve. Désignons par $\chi_s : \Gamma \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'une classe à gauche $s \in \Gamma/\Gamma_0$. Posons

$$T = \{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma \mid x^{-1}y \in \Gamma_0\} = \coprod_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (s\Gamma_0 \times s\Gamma_0)$$

où $\coprod$ désigne une réunion disjointe. Pour tout $n \geqslant 1$ on note η'_n la restriction de η_n à Γ_0. On a

$$\begin{aligned} \| \eta'_n \|_1 &= \sum_{(x,y) \in T} \xi_n(x)\xi_n(y) = \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} \sum_{x \in \Gamma, y \in \Gamma} (\xi_n \chi_s)(x)(\xi_n \chi_s)(y) \\ &= \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (\| \xi_n \chi_s \|_1)^2 \end{aligned}$$

ainsi que

$$1 = \| \xi_n \|_1 = \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} \| \xi_n \chi_s \|_1 \leqslant \left(\sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (\| \xi_n \chi_s \|_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{f} = (\| \eta'_n \|_1 f)^{\frac{1}{2}}$$

(on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la somme sur Γ/Γ_0). Par suite

$$\| \eta'_n \|_1 \geqslant \frac{1}{f}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Par ailleurs, il résulte du lemme 1 que $\eta_n(e) = \| \xi_n \|_2^2$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La conclusion du lemme 2 en résulte. $\square$

Notons que les lemmes 1 et 2 ci-dessus sont des raffinements des lemmes 3 et 4 de [GiH].

Dans la situation du lemme 2, posons de plus

$$\zeta_n = \eta_n - \eta_n(e)\delta$$

pour tout $n \geqslant 1$, où δ désigne la fonction caractéristique de $\{e\}$ dans Γ. Notons ζ'_n la restriction de ζ_n à Γ_0 et $\| \zeta'_n \|$ sa norme dans $l^1(\Gamma_0)$. Le lemme 2 se

reformule en les inégalités $\|\zeta'_n\| \geqslant f^{-1}$, et on peut définir une suite asymptotiquement invariante $(\zeta'_n \|\zeta'_n\|^{-1})_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma_0)^+_{0,1}$. Il en résulte que Γ_0 est intérieurement moyennable, ce qui achève la preuve de la proposition 4.

3. Lemmes préliminaires

Soit d'abord Γ un groupe discret. Notons $Conj'(\Gamma)$ l'ensemble des classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{e\}$. Avec les notations du début du chapitre précédent, on a

$$\alpha_\Gamma = \bigoplus_{C \in Conj'(\Gamma)} \alpha_{\Gamma, C}$$

où $\oplus$ désigne une somme orthogonale. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, choisissons de plus un élément $\gamma_C \in C$; notons $\mathscr{C}_\Gamma = \{\gamma_C\}_{C \in Conj'(\Gamma)}$ le sous-ensemble de Γ ainsi spécifié. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, la classe C s'identifie à l'espace homogène $Z(\gamma_C, \Gamma)\backslash\Gamma$ et on a

$$\alpha_{\Gamma, C} \approx Ind^\Gamma_{Z(\gamma_C, \Gamma)}(1_{Z(\gamma_C, \Gamma)})$$

où $Z(\gamma_C, \Gamma)$ désigne le centralisateur de γ_C dans Γ et où $\approx$ indique l'équivalence unitaire des représentations. On a donc

$$\alpha_\Gamma \approx \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^\Gamma_{Z(\gamma, \Gamma)}(1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Lemme 3. *Soit Γ un réseau dans un groupe localement compact G. Si Γ est intérieurement moyennable, on a*

$$1_G \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^G_{Z(\gamma, G)}(1_{Z(\gamma, G)}) .$$

Preuve. Par hypothèse, on a

$$1_\Gamma \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^\Gamma_{Z(\gamma, \Gamma)}(1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

En induisant à G on obtient

$$Ind^G_\Gamma(1_\Gamma) \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^G_{Z(\gamma, \Gamma)}(1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Par ailleurs, 1_G est une sous-représentation de $Ind^G_\Gamma(1_\Gamma)$, car Γ est un réseau dans G. La conclusion résulte donc de l'assertion (ii) du lemme suivant. □

Le lemme qui suit est essentiellement le «principe de majoration de Herz» [EyL].