3. Lemmes préliminaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

reformule en les inégalités $\|\zeta'_n\| \geqslant f^{-1}$, et on peut définir une suite asymptotiquement invariante $(\zeta'_n \|\zeta'_n\|^{-1})_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma_0)^+_{0,1}$. Il en résulte que Γ_0 est intérieurement moyennable, ce qui achève la preuve de la proposition 4.

3. Lemmes préliminaires

Soit d'abord Γ un groupe discret. Notons $Conj'(\Gamma)$ l'ensemble des classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{e\}$. Avec les notations du début du chapitre précédent, on a

$$\alpha_\Gamma = \bigoplus_{C \in Conj'(\Gamma)} \alpha_{\Gamma, C}$$

où $\oplus$ désigne une somme orthogonale. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, choisissons de plus un élément $\gamma_C \in C$; notons $\mathscr{C}_\Gamma = \{\gamma_C\}_{C \in Conj'(\Gamma)}$ le sous-ensemble de Γ ainsi spécifié. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, la classe C s'identifie à l'espace homogène $Z(\gamma_C, \Gamma)\backslash\Gamma$ et on a

$$\alpha_{\Gamma, C} \approx Ind^\Gamma_{Z(\gamma_C, \Gamma)}(1_{Z(\gamma_C, \Gamma)})$$

où $Z(\gamma_C, \Gamma)$ désigne le centralisateur de γ_C dans Γ et où $\approx$ indique l'équivalence unitaire des représentations. On a donc

$$\alpha_\Gamma \approx \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^\Gamma_{Z(\gamma, \Gamma)}(1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Lemme 3. *Soit Γ un réseau dans un groupe localement compact G. Si Γ est intérieurement moyennable, on a*

$$1_G \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^G_{Z(\gamma, G)}(1_{Z(\gamma, G)}) .$$

Preuve. Par hypothèse, on a

$$1_\Gamma \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^\Gamma_{Z(\gamma, \Gamma)}(1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

En induisant à G on obtient

$$Ind^G_\Gamma(1_\Gamma) \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^G_{Z(\gamma, \Gamma)}(1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Par ailleurs, 1_G est une sous-représentation de $Ind^G_\Gamma(1_\Gamma)$, car Γ est un réseau dans G. La conclusion résulte donc de l'assertion (ii) du lemme suivant. □

Le lemme qui suit est essentiellement le «principe de majoration de Herz» [EyL].

LEMME 4. *Soient* $\{H_j\}_{j \in J}$ *et* $\{H'_j\}_{j \in J}$ *deux familles de sous-groupes fermés d'un groupe localement compact* G *telles que* $H'_j \subset H_j$ *pour tout* $j \in J$.

(i) S'il existe pour tout $j \in J$ *une représentation unitaire* π_j *de* H_j *telle que* $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(\pi_j)$, *alors* $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$.

(ii) Si $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H'_j}^G(1_{H'_j})$, *alors* $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$.

Preuve. (a) Précisons le modèle considéré ici pour les représentations induites en rappelant ceci. On considère d'abord un sous-groupe fermé H de G et une représentation π de H dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$.

On choisit une mesure μ sur l'espace homogène $H \backslash G$ dont la classe est invariante par l'action à droite de G. (On peut par exemple prendre l'image par la projection canonique $G \to H \backslash G$ d'une mesure de probabilité sur G dans la classe de la mesure de Haar.) Pour tout $g \in G$, on a donc une dérivée de Radon-Nikodym décrite par l'application

$$\Delta : \begin{cases} (H \backslash G) \times G \to \mathbf{R}_+ \\ (s, g) \mapsto \frac{d\mu(s^g)}{d\mu(s)} \end{cases}$$

satisfaisant l'identité de cocycle $\Delta(s, gg') = \Delta(s, g)\Delta(s^g, g')$.

On introduit l'espace vectoriel $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ des applications mesurables $\xi : G \to \mathscr{H}_\pi$ (modulo l'égalité presque partout) qui sont H-équivariantes, c'est-à-dire telles que

$$\xi(h^{-1}x) = \pi(h)\xi(x) \text{ pour tout } h \in H \text{ et presque tout } x \in G$$

et de carré sommable au sens où

$$\int_{H \backslash G} \| \xi(\dot{x}) \|^2 \, d\mu(\dot{x}) < \infty \; ;$$

comme $\| \xi(x) \|^2$ ne dépend que de la classe $\dot{x} = Hx$ de x, on a commis l'abus d'écrire ce nombre $\| \xi(\dot{x}) \|^2$. L'espace $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$< \xi \mid \xi' > = \int_{H \backslash G} < \xi(\dot{x}) \mid \xi'(\dot{x}) > d\mu(\dot{x})$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On définit la représentation $\tilde{\pi} = Ind_H^G(\pi)$ de G dans $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ par

$$(\tilde{\pi}(g)\xi)(x) = \xi(xg)\Delta(\dot{x}, g)^{1/2}$$

pour tous $g \in G$, $\xi \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ et $x \in G$ (avec $\dot{x} = Hx \in H\backslash G$). On vérifie que $\tilde{\pi}$ est bien une représentation de G, car Δ est un cocycle, et qu'elle est bien unitaire, car (en posant $y = \dot{x}^g$)

$$\begin{aligned}
\| \tilde{\pi}\ (g)\xi \|^2 &= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{x}^g) \|^2 \Delta(\dot{x}, g)\, d\mu(\dot{x}) \\
&= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{y}) \|^2 \Delta(\dot{y}^{g^{-1}}, g)\, \Delta(\dot{y}, g^{-1})\, d\mu(\dot{y}) \\
&= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{y}) \|^2 d\mu(\dot{y}) \\
&= \| \xi \|^2
\end{aligned}$$

pour tous $g \in G$ et $\xi \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$.

(b) Montrons d'abord l'assertion (i) du lemme lorsqu'il n'y a qu'un sous-groupe H de G. Posons $\sigma = 1_H$ et $\tilde{\sigma} = Ind_H^G(1_H)$. L'application de composition avec la norme de $\mathscr{H}_\pi$ s'écrit

$$N : \begin{cases} L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H \to L^2(G, \mathscr{H}_\sigma = \mathbf{C})^H \\ \xi \quad \mapsto \quad (G \to \mathbf{C},\ x \mapsto \| \xi(x) \|)\ . \end{cases}$$

Elle est G-équivariante (via les représentations $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\sigma}$), lipschitzienne de rapport 1, et $\| N(\xi) \| = \| \xi \|$ pour tout $\xi \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$.

Dire que $1_G \prec \tilde{\pi}$, c'est dire que, pour toute partie compacte K de G et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\xi = \xi_{K,\varepsilon} \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ telle que $\| \xi \| = 1$ et telle que

$$\sup_{k \in K} \| \tilde{\pi}(k)\xi - \xi \| < \varepsilon\ .$$

Ces propriétés impliquent qu'on a aussi $\| N(\xi) \| = 1$ et

$$\sup_{k \in K} \| \tilde{\sigma}(k) N(\xi) - N(\xi) \| < \varepsilon\ .$$

Il en résulte que $1_G \prec \tilde{\sigma}$.

(c) On montre le cas général de l'assertion (i) grâce au même argument, en utilisant une application

$$N : \begin{cases} \oplus_{j \in J} L^2(G, \mathscr{H}_{\pi_j})^{H_j} \to \oplus_{j \in J} L^2(G, \mathbf{C})^{H_j} \\ (\xi_j)_{j \in J} \quad \mapsto \quad (N_j \xi_j)_{j \in J} \end{cases}$$

avec N_j comme dans (b) pour tout $j \in J$.

(d) L'hypothèse de (ii) s'écrit aussi

$$1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (Ind_{H_j'}^{H_j}(1_{H_j'}))$$

de sorte que l'assertion (ii) est un cas particulier de (i). □

Remarque. Pour illustrer le lemme 4, répétons l'un des arguments montrant qu'un groupe Γ qui est moyennable et non réduit à $\{e\}$ est aussi intérieurement moyennable. Rappelons que Γ est moyennable si et seulement si $1_\Gamma \prec \rho_\Gamma$.

Pour *toute* classe de conjugaison $C \subset \Gamma - \{e\}$, si on choisit un élément γ de C, on a (avec les notations comme au chapitre 3)

$$1_\Gamma \prec \rho_\Gamma = Ind_{Z(\gamma,\Gamma)}^\Gamma \rho_{Z(\gamma,\Gamma)}.$$

Le lemme 4.i implique qu'on a aussi

$$1_\Gamma \prec Ind_{Z(\gamma,\Gamma)}^\Gamma 1_{Z(\gamma,\Gamma)} = \alpha_{\Gamma,C}.$$

On a donc a fortiori $1_\Gamma \prec \alpha_\Gamma$.

LEMME 5. *Soit G un groupe localement compact qui possède la propriété (T) de Kazhdan et soit $(H_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes fermés de G. On suppose que, pour tout $j \in J$, il n'existe aucune mesure de probabilité G-invariante sur l'espace homogène $H_j \backslash G$. Alors*

$$1_G \not\prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}).$$

Preuve. Supposons par l'absurde que l'on ait $1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j})$. Comme G a la propriété (T), la contenance aurait lieu au sens fort. Comme la représentation 1_G est irréductible, il existerait $j \in J$ tel que 1_G soit une sous-représentation de $Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$, c'est-à-dire que $H_j \backslash G$ possède une mesure de probabilité G-invariante, contrairement à l'hypothèse. □

LEMME 6. *Soit G un groupe localement compact agissant continûment dans un espace compact Ω et soit $(H_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes fermés de G. On suppose qu'il n'existe aucune mesure de probabilité G-invariante sur Ω, et qu'il existe pour tout $j \in J$ une mesure de probabilité H_j-invariante ν_j sur Ω. Alors*

$$1_G \not\prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}).$$

Preuve. On convient ici que l'action de G sur Ω est à droite.

Pour tout $j \in J$, on choisit une mesure de probabilité μ_j sur $H_j \backslash G$ qui est quasi-invariante par G (voir la preuve du lemme 4). On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{j \in J} L^2(H_j \backslash G, \mu_j)$$

de la représentation $\bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$ ainsi que sa sphère unité $\mathscr{H}_1$. On introduit aussi l'espace $Prob(\Omega)$ des mesures de probabilité sur Ω, muni de la topologie vague; c'est naturellement un G-eśpace compact. Nous allons définir en deux temps une application

$$\begin{cases} \mathscr{H}_1 & \to & Prob(\Omega) \\ f & \mapsto & \nu_f \end{cases}$$

lipschitzienne et G-équivariante.

Dans un premier temps, on introduit pour tout $j \in J$ le G-espace $Mes_+(H_j \backslash G)$ des mesures positives finies sur $H_j \backslash G$, ainsi que l'application

$$\begin{cases} L^2(H_j \backslash G, \mu_j) \to Mes_+(H_j \backslash G) \\ f_j \qquad \mapsto \qquad \mu_{f_j} = |f_j|^2 \mu_j \end{cases}$$

qui est évidemment lipschitzienne sur les parties bornées. De plus, comme G agit à gauche via $Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$ sur $L^2(H_j \backslash G, \mu_j)$ et à droite sur $Mes_+(H_j \backslash G)$, on a (avec des notations dont nous espérons le sens évident au lecteur)

$$\begin{aligned} d\mu_{\pi(g^{-1})f_j}(\dot{x}) &= |f_j(\dot{x}^g)|^2 \Delta(\dot{x}, g) d\mu_j(\dot{x}) \\ &= |f_j(\dot{x}^g)|^2 d\mu_j(\dot{x}^g) \\ &= d((\mu_{f_j})^g)(\dot{x}) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$.

Dans un second temps, on introduit le sous-espace

$$\prod_{j \in J}^1 Mes_+(H_j \backslash G) \subset \prod_{j \in J} Mes_+(H_j \backslash G)$$

formé des familles $(\lambda_j)_{j \in J}$ telles que $\sum_{j \in J} \lambda_j(H_j \backslash G) < \infty$, ainsi que l'application de convolution

$$\begin{cases} \prod_{j \in J}^1 Mes_+(H_j \backslash G) \to Mes_+(\Omega) \\ (\lambda_j)_{j \in J} \quad \mapsto \quad \sum_{j \in J} \nu_j \star \lambda_j \end{cases}$$

où

$$\nu_j \star \lambda_j = \int_{H_j \backslash G} (\nu_j)^{\dot{g}} d\lambda_j(\dot{g}) .$$

Pour tout $g \in G$ de projection canonique $\dot{g} \in H_j \backslash G$, l'image $(\nu_j)^g$ par g de la mesure ν_j sur Ω ne dépend que de $\dot{g}$, et nous avons noté $(\nu_j)^{\dot{g}}$ cette mesure image. Il est à nouveau évident que $(\lambda_j) \mapsto \sum \nu_j \star \lambda_j$ est une application lipschitzienne, et qu'elle est G-équivariante pour les actions à droite naturelles de G à la source et au but.

On obtient par composition l'application $\mathscr{H}_1 \to Prob(\Omega)$ annoncée, qui applique un vecteur unité $f = (f_j)_{j \in J}$ sur la mesure de probabilité

$$\nu_f = \sum_{j \in J} \int_{H_j \backslash G} (\nu_j)^{\dot{g}} \, |f_j(\dot{g})|^2 \, d\mu_j(\dot{g}) \, .$$

Supposons alors qu'on ait

$$1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j}) \, .$$

Il existerait dans $\mathscr{H}_1$ une suite de vecteurs

$$(f_n)_{n \geqslant 1} = ((f_{j,n})_{j \in J})_{n \geqslant 1}$$

asymptotiquement G-invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \in K} \sum_{j \in J} \| Ind_{H_j}^G(1_{H_j})(k^{-1})(f_{j,n}) - f_{j,n} \|^2 = 0$$

pour toute partie compacte K de G. Il en résulterait que la suite correspondante $(\nu_{f_n})_{n \geqslant 1}$ de $Prob(\Omega)$ serait aussi asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \in K} \| (\nu_{f_n})^k - \nu_{f_n} \| = 0$$

pour toute partie compacte K de G. Quitte à passer à une suite extraite, on obtiendrait à la limite une mesure de probabilité G-invariante sur Ω, en contradiction avec les hypothèses du lemme. L'hypothèse de contenance faible ci-dessus est donc impossible, et la preuve est achevée. □

4. Preuve des résultats de l'introduction

Enonçons d'abord le raffinement suivant du théorème A.

Théorème B. *On considère des groupes localement compacts* G_H, G_T *un réseau*

$$\Gamma \subset G = G_H \times G_T$$

et un sous-groupe S *de* G *contenant* Γ, *ayant les propriétés suivantes.*