1. La transformation des fractions continues

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

l'espace $SL(2, \mathbf{Z})\backslash SL(2, \mathbf{R})$ comme espace modulaire du tore, et le flot g_t comme flot de Teichmüller sur cet espace; ce point de vue, inutile ici, permet d'étudier le flot de Teichmüller sur l'espace modulaire d'une surface quelconque, en codant par des «rectangles cousus», généralisations de notre domaine fondamental en L. Cette étude a été faite par Veech [Ve2], et l'on peut considérer le présent article comme un exposé du cas le plus simple de cette construction ([Ve1], p. 1391, où on étudie aussi le flot horocyclique).

Dans la première section, nous rappelons ce que nous aurons besoin de savoir sur les fractions continues; dans la deuxième section, nous définissons le flot géodésique sur la surface modulaire, et nous en donnons un autre modèle dans la troisième section. Dans la quatrième, nous définissons de manière élémentaire un système de coordonnées global sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire, et dans la cinquième section, nous montrons que le flot géodésique admet une section sur laquelle l'application de premier retour est un revêtement double de l'extension naturelle de la transformation des fractions continues. Dans la sixième section, nous donnons, comme exemple d'application de cette méthode, une démonstration géométrique d'un théorème de Paul Lévy sur la croissance des dénominateurs des convergents pour presque tout nombre, en utilisant l'ergodicité du flot géodésique. Dans la dernière section, nous montrons comment, en changeant la section choisie pour le flot géodésique, on peut retrouver l'algorithme additif des fractions continues; on pourrait ainsi trouver, avec d'autres sections, une infinité d'algorithmes du même type.

1. La transformation des fractions continues

Il est classique que tout réel $x \in]0, 1[$ s'écrive de façon unique

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

où la suite (a_n) est une suite d'entiers strictement positifs, finie et se terminant par un entier strictement plus grand que 1 si x est rationnel, infinie sinon. On note habituellement cette égalité $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$; dans le cas particulier où la suite est périodique, on note $x = [0; \overline{a_1, \ldots, a_n}]$. Un calcul immédiat montre que $a_1 = [1/x]$, où $[t]$ est la partie entière de t, et que, si

l'on pose $x_1 = \{1/x\}$, où $\{t\} = t - [t]$ est la partie fractionnaire de t, on a $a_2 = [1/x_1]$. Plus généralement, définissons les deux applications

$$f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbf{N} \qquad x \mapsto \left[\frac{1}{x}\right]$$

$$T\colon\ [0,1[\ \to [0,1[\quad x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\} \quad \text{si } x \neq 0, \quad T(0) = 0\ .$$

On vérifie que a_n est défini si $T^{n-1}(x) \neq 0$, et vaut alors $f(T^{n-1}(x))$.

La transformation T est appelée transformation des fractions continues, elle est surjective, mais non injective; on peut dans un tel cas construire une application bijective associée, «l'extension naturelle», par limite inductive, en considérant tous les passés possibles pour un point, c'est-à-dire en considérant les suites $(x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ telles que $T(x_i) = x_{i+1}$ (voir [Ro] pour une étude plus poussée des extensions naturelles).

Cette extension naturelle admet ici, à un ensemble de mesure nulle près, un modèle géométrique: une application $\bar{T}$ définie sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$, bijective sauf sur un ensemble de mesure nulle, et telle que, si l'on note π la projection sur la première variable, on ait $\pi(\bar{T}(x,y)) = T(x)$, la deuxième variable représentant en quelque sorte le «passé». Cette application a pour ensemble de définition le sous-ensemble Σ du plan défini par les équations $0 \leqslant x < 1$, et $0 \leqslant y < 1/(1+x)$ si $x < 1/2, 0 < y < 1/(1+x)$ sinon, et elle est définie par

$$\begin{aligned} \bar{T}\colon\ & \Sigma \to \Sigma \\ & (x,y) \mapsto \left(\left\{\frac{1}{x}\right\}, x - x^2 y\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ & (0,y) \mapsto (0,0)\ . \end{aligned}$$

Cette application est bijective sauf aux points $(0,y)$ qui ont tous même image et aux points $(x,0)$ qui n'ont pas d'antécédent si $x \neq 0$; elle envoie les segments verticaux sur des segments verticaux, et elle est discontinue sur les segments $x = 1/n$ pour n entier, mais continue sur les rectangles curvilignes qu'ils délimitent. Un calcul simple montre que le rectangle curviligne défini par $1/(n+1) < x < 1/n, 0 < y < 1/(1+x)$ est envoyé sur le rectangle défini par $0 < x < 1, 1/(n+1+x) < y < 1/(n+x)$, avec une rotation d'un demi-tour, qui envoie le bord droit sur le bord gauche et le bord inférieur sur le bord supérieur. C'est pour cela qu'il faut enlever de Σ les points $(x,0), x \geqslant 1/2$, qui seraient envoyés sur le bord supérieur qui n'appartient pas à Σ (voir Fig. 2).

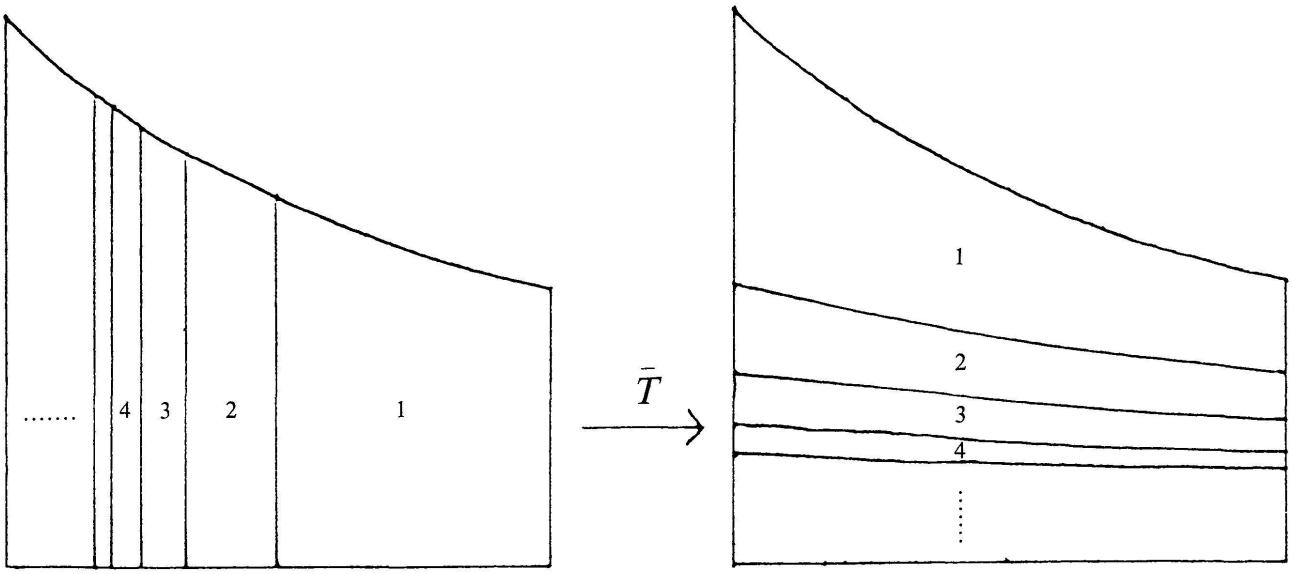

FIGURE 2

C'est l'application $\bar{T}$ que nous trouverons naturellement ci-dessous comme application de premier retour du flot géodésique sur la surface modulaire; elle a de plus l'intérêt de préserver la mesure de Lebesgue, puisque son jacobien est 1 en tout point où elle est continue; la projection sur la première coordonnée donne la mesure de Gauss, de densité $1/(1+x)$, préservée par T (pour plus de détails, voir [AN]).

On peut présenter cette application d'une autre manière: le changement de variable $(x, y) \mapsto (x, y/(1-xy))$ envoie Σ sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ privé d'une partie de son bord; on vérifie facilement qu'il conjugue l'application $\bar{T}$ à l'application $\bar{T}_1$ définie, sur l'intérieur de son domaine, par

$$\bar{T}_1 : \ ]0, 1[\times]0, 1[\to[0, 1\times]0, 1[$$

$$(x, y) \mapsto \left(\left\{\frac{1}{x}\right\}, \frac{1}{y + \left[\frac{1}{x}\right]}\right)$$

C'est sous cette forme que l'on trouve en général l'extension naturelle de la transformation des fractions continues (voir par exemple [N], [It]). Cette application est continue sur les rectangles d'équation $1/(n+1) < x < 1/n$, qui sont envoyés respectivement sur les rectangles $1/(n+1) < y < 1/n$; ces rectangles forment une partition de Markov, et il est particulièrement commode d'utiliser $\bar{T}_1$ pour construire un *système dynamique symbolique,* de la façon suivante: A chaque couple (x, y) de nombres irrationnels de l'intervalle $[0, 1]$, on associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ définie par $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ et $y = [0; a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-n}, \ldots]$; Ceci définit une bijection entre l'ensemble I des points du carré de coordonnées irrationnelles et l'ensemble des suites

biinfinies à valeurs entières strictement positives. On vérifie immédiatement que I est le complémentaire, dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$, des orbites (pour $\bar{T}_1$) des points de la forme $(x, 0)$ ou $(0, y)$. Cet ensemble est de mesure pleine, invariant par $\bar{T}_1$, et la restriction de $\bar{T}_1$ à I est une bijection.

De même que l'on a, pour le développement en fraction continue, $a_n = f(T^{n-1}(x))$ avec n entier positif, on a ici $a_n = \bar{f}(\bar{T}_1^{n-1}(x, y))$ pour tout n dans $\mathbf{Z}$, où l'on définit $\bar{f}$ par $\bar{f}(x, y) = [1/x]$ (numéro du rectangle qui contient le point (x, y)). Cette formule montre que l'application de codage qui à (x, y) associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ conjugue $\bar{T}_1$ au décalage S sur $\mathbf{N}^{*\mathbf{Z}}$ (S est l'application qui à la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ définie par $v_n = u_{n+1}$).

2. Le flot géodésique sur la surface modulaire

Du point de vue algébrique, le flot géodésique sur la surface modulaire est l'action à droite sur le quotient $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$ du groupe des matrices diagonales positives, de forme $g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$.

Pour justifier ce nom de flot géodésique, il faut rappeler un peu de géométrie. On nomme demi-plan de Poincaré l'ensemble $\mathbf{H} = \{x + iy \mid y > 0\}$ des complexes à partie imaginaire strictement positive, muni de la métrique $(dx^2 + dy^2)/y^2$. Le groupe $SL(2, \mathbf{R})$ agit à gauche sur $\mathbf{H}$ par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} . z = \frac{az + c}{bz + d}$$

et cette action est isométrique. On vérifie facilement qu'elle est transitive, et que le stabilisateur du point i est le groupe $SO(2, \mathbf{R})$, donc le demi-plan de Poincaré s'identifie à l'espace homogène $SL(2, \mathbf{R})/SO(2, \mathbf{R})$. Le stabilisateur agit transitivement sur le cercle unité du plan tangent à i, donc $SL(2, \mathbf{R})$ agit transitivement sur le fibré unitaire tangent du demi-plan. Le stabilisateur du vecteur tangent vertical en i est $\{Id, -Id\}$ (l'action de la matrice $-Id$ sur $\mathbf{H}$ est triviale), et le fibré unitaire tangent s'identifie au quotient $PSL(2, \mathbf{R})$ de $SL(2, \mathbf{R})$ par son centre $\{\pm Id\}$. Par raison de symétrie, la courbe $\gamma(t) = e^t i = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} . i$ est une géodésique, et un calcul facile montre qu'elle est paramétrée par sa longueur (c'est de là que vient le facteur $1/2$ dans la définition de g_t). Puisqu'une isométrie transforme géodésique en