1.2 Le groupoïde des points de $P^n(F)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\hat{f}} x$ (resp. $y \xrightarrow{\hat{f}} x \xrightarrow{f} y$) par x (resp. y). La composition dans $\mathscr{L}$ s'obtient en composant les chemins; l'inverse de la classe de $x \xrightarrow{f} y$ est alors la classe de $y \xrightarrow{\hat{f}} x$.

Le groupoïde $\mathscr{G}$ se déduit de $\mathscr{L}$ en passant au quotient par les relations $\mathscr{R}$. Plus précisément, les relations $\mathscr{R}$ engendrent une famille de groupes $(G_x)_{x \in X}$, où G_x est un sous-groupe de $Aut_{\mathscr{L}}(x)$, satisfaisant à la condition

(*) pour tout morphisme $f : x \to y$ de $\mathscr{L}$, la conjugaison: $Aut_x \to Aut_y$, $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$, induit une bijection de G_x sur G_y;

on obtient alors $\mathscr{G}$ à partir de $\mathscr{L}$ en passant au quotient par la relation d'équivalence suivante sur les morphismes de $\mathscr{L}$

(**) pour $f, g \in Mor(x, y)$, $f \sim g$ si $g^{-1} \circ f \in G_x$. $\square$

DÉFINITION 1. *Pour F un corps et $l \geqslant 1$, $\mathscr{V}_{n,l}$ désigne le groupoïde dont les objets sont les sous-espaces de dimension l de F^{n+1} et les morphismes, les isomorphismes linéaires entre ces espaces. Pour $l = 1$, on note plus simplement ce groupoïde $\mathscr{V}_n$.*

Dans les paragraphes 1.2 et 2.1, on donne pour $n \geqslant 3l - 1$ une présentation par générateurs et relations du groupoïde $\mathscr{V}_{n,l}$, en termes de géométrie projective.

1.2 LE GROUPOÏDE DES POINTS DE $\mathbf{P}^n(F)$

Dans la suite, F est un corps commutatif quelconque, en particulier on n'exclut pas le corps à deux éléments.

DÉFINITION 2. *Pour $n \geqslant 2$, on considère le groupoïde $\mathscr{G}_n$ défini par générateurs et relations comme suit:*

i) Les objets de $\mathscr{G}_n$ sont les points de $\mathbf{P}^n(F)$.

ii) L'ensemble des générateurs $\mathscr{F}$ est constitué des flèches $f = (x \xrightarrow{a} y)$, où x et y sont des points distincts de $\mathbf{P}^n(F)$ et a est un point de la droite $\langle x, y \rangle$ distinct de x et y.

iii) Les relations $\mathscr{R}$ sont du type $h = g \circ f$ où $f = (x \xrightarrow{a} y)$, $g = (y \xrightarrow{b} z)$ et $h = (x \xrightarrow{c} z)$ sont comme sur la figure 1, c'est-à-dire que x, y et z sont en position générale et c est l'intersection des droites $\langle x, z \rangle$ et $\langle a, b \rangle$.

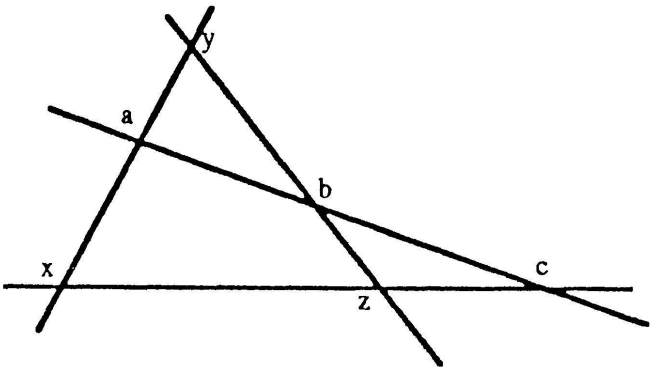

FIGURE 1

Un triangle comme sur la figure 1 est une cubique dégénérée; noter alors l'analogie avec la définition de la loi de groupe sur une cubique non singulière. On peut dire aussi que les relations $\mathscr{R}$ sont données par les configurations de Menelaüs: rappelons que le théorème de Menelaüs exprime l'alignement des points a, b, c, sur la figure 1, par la condition affine $\frac{ax}{ay}\frac{by}{bz}\frac{cz}{cx} = 1$.

On rappelle que si F a au moins trois éléments et si x, y, a, b sont quatre points distincts de $\mathbf{P}^n(F) = F \cup \{\infty\}$, il existe un unique élément $r(x, y; a, b) \in F^\times$ et une unique homographie $f \in PGL(2, F)$ tels que

$$(f(x), f(y), f(a), f(b)) = (\infty, 0, 1, r(x, y; a, b)) .$$

L'élément $r(x, y; a, b) = \frac{x-a}{x-b}\frac{y-b}{y-a}$ est le birapport des quatre points x, y, a, b; pour les généralités sur le birapport, voir par exemple [1].

Dans la suite on convient que $r(x, y; a, b) = 1$, si $a = b$.

Noter que le groupe projectif $PGL(n+1, F)$ opère naturellement dans $\mathscr{G}_n$ par automorphismes de groupoïdes.

THÉORÈME 1. *Le groupoïde $\mathscr{G}_n$ vérifie les propriétés suivantes*

1) Pour $x \neq y$, si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ alors $f^{-1} = (y \xrightarrow{a} x)$.

2) Pour $x \neq y$, $Mor(x, y)$ coïncide avec l'ensemble des générateurs de source x et de but y.

3) Pour tout $x \in \mathbf{P}^n(F)$, il existe un unique isomorphisme, $t_x : Aut_{\mathscr{G}_n}(x) \to F^\times$, tel que pour $f = (x \xrightarrow{a} y)$ et $g = (y \xrightarrow{a} x)$, $t_x(g \circ f) = r(x, y; a, b)$. De plus ces isomorphismes sont compatibles avec l'action de $PGL(n+1, F)$ dans $\mathscr{G}_n$.

Ce théorème est en fait un corollaire du suivant.

THÉORÈME 2. *Il existe un isomorphisme de groupoïdes* $\varphi : \mathscr{G}_n \to \mathscr{V}_n$ *tel que, pour* $f = (x \xrightarrow{a} y)$ *et* $g = (y \xrightarrow{a} x)$, *on a* $\varphi(g \circ f) = r(x, y; a, b)$.

Avant de montrer ce dernier résultat, donnons deux illustrations géométriques du théorème 1.

Si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ et $g = (y \xrightarrow{a} z)$ sont tels que x, y, z sont *distincts et alignés,* alors $g \circ f = (x \xrightarrow{c} z)$, où c est le point de $\langle x, y \rangle$ obtenu par la construction géométrique de la figure 2.

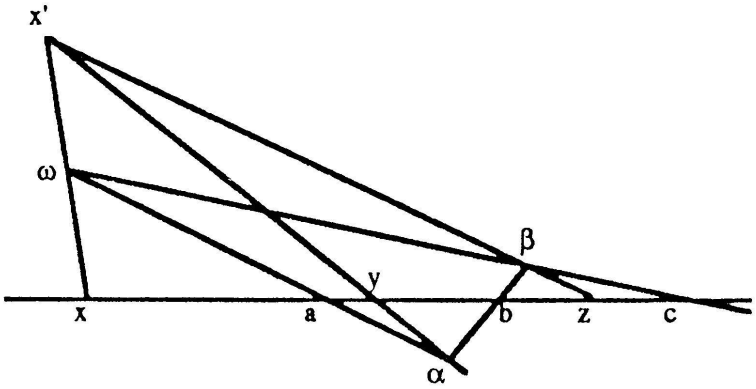

FIGURE 2

Détaillons cette construction: on choisit un point x' en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et un point ω sur la droite $\langle x, x' \rangle$ distinct de x et x'. Le point α correspond alors a la composée $f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x)$, le point β à $g \circ (f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x))$ et le point c à

$$(g \circ (f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x))) \circ (x \xrightarrow{\omega} x') .$$

L'associativité du groupoïde $\mathscr{G}_n$ et le point *1)* du théorème 1 montrent que cette dernière composition n'est autre que $g \circ f$. Le lecteur pourra considérer le cas particulier où F est le corps à deux éléments et constater que si x, y, z sont les trois points d'une droite de $\mathbf{P}^2(F)$, on a la relation $(y \xrightarrow{x} z) \circ (x \xrightarrow{z} y) = (x \xrightarrow{y} z)$. Rappelons que le plan projectif du corps à deux éléments est constitué de 7 points et 7 droites disposés comme sur la figure 3

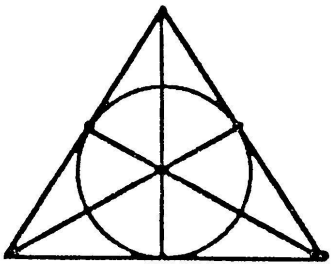

FIGURE 3

L'associativité, dans le cas de trois morphismes où les objets sont en position générale, correspond à la configuration de Desargues de la figure 4.

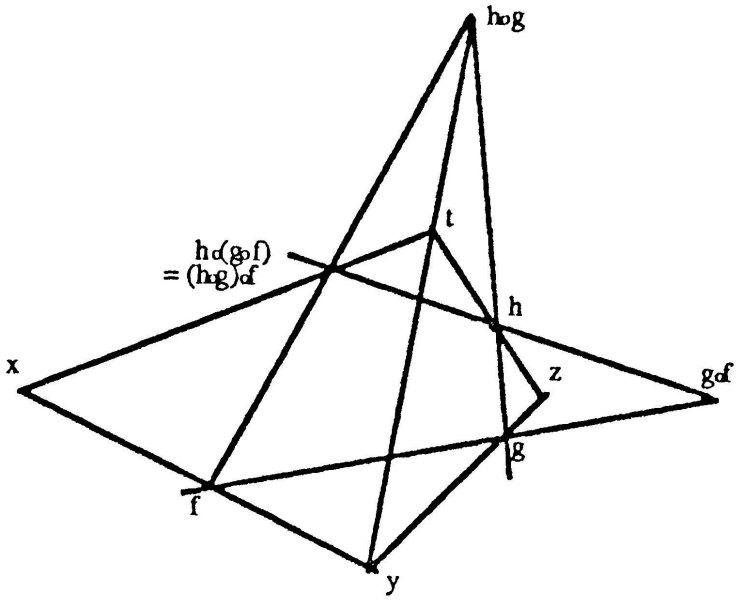

FIGURE 4

Rappelons le théorème de Desargues: si x, y, z et x', y', z' sont deux triangles de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$, où $n \geqslant 2$, tels que x et x', y et y', z et z' soient distincts, alors les points $\langle x, y\rangle \cap \langle x', y'\rangle$, $\langle y, z\rangle \cap \langle y', z'\rangle$ et $\langle x, z\rangle \cap \langle x', z'\rangle$ sont alignés, si et seulement si les droites $\langle x, x'\rangle$, $\langle y, y'\rangle$ et $\langle z, z'\rangle$ sont concourrantes.

1.3 PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans toute la suite, on note p l'application quotient $F^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbf{P}^n(F)$.

On va construire un morphisme de groupoïdes $\varphi : \mathscr{G}_n \to \mathscr{V}_n$, bijectif sur les ensembles d'objets. Pour prouver que φ est un isomorphisme, il suffira de vérifier que les morphismes induits $Aut(x) \to Aut(\varphi(x))$ sont des isomorphismes pour tout x de $\mathbf{P}^n(F)$.

On note $\varphi(x)$ la droite $p^{-1}(x)$. Si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ est un générateur de $\mathscr{G}_n$, on définit $\varphi(f)$ comme l'isomorphisme linéaire: $p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$, dont le graphe est la droite conjuguée harmonique de $p^{-1}(a)$ par rapport à $p^{-1}(x)$ et $p^{-1}(y)$; autrement dit, $\varphi(f)$ est caractérisé par le fait que pour un vecteur non nul $\vec{x} \in p^{-1}(x)$, $\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x}$ appartient à $p^{-1}(a)$.

Pour voir que ces données induisent un morphisme $\varphi : \mathscr{G}_n \to \mathscr{V}_n$, vérifions la comptabilité avec les relations $\mathscr{R}$. Soit f, g, h comme sur la figure 1, on a

$$\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x} \in p^{-1}(a) \quad et \quad \varphi(g)(\varphi(f)(\vec{x})) - \varphi(f)(\vec{x}) \in p^{-1}(b)\ ,$$