2. Groupoïdes et Grassmanniennes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

au-dessus de x, y, a, b tels que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ et $\vec{b} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$, alors $\varphi(f)(\vec{x}) = \varphi(h)(-\vec{y}) = \lambda\vec{x}$, donc $\varphi(f)$ est la multiplication par λ. D'autre part $\lambda = r(x, y; a, b)$; en effet si on envoie x à l'infini et si on prend y pour origine de la droite affine ainsi obtenue, les coordonnées de a et b sont respectivement 1 et λ, mais $r(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$.

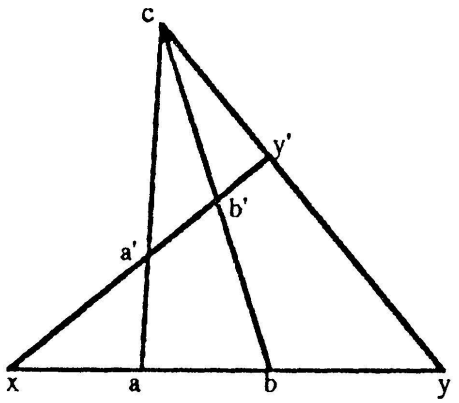

FIGURE 6

Pour achever la preuve, montrons que $\varphi : Aut(x) \to Aut(\varphi(x))$ est injective. Notons $(x, y; a, b)$ l'automorphisme de x: $(y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$, et prouvons que si $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$, alors $(x, y; a, b) = (x, y'; a', b')$. On peut supposer que $a \neq b$ et $a' \neq b'$. Si x, y, y' ne sont pas alignés, par l'invariance projective du birapport l'égalité $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$ entraîne que les droites $\langle y, y' \rangle$, $\langle a, a' \rangle$ et $\langle b, b' \rangle$ sont concourrantes. Mais alors en utilisant les relations de définition de $\mathscr{G}_n$, on a successivement

$$(y' \xrightarrow{a'} x) \circ (x \xrightarrow{b'} y') \circ (y \xrightarrow{b} x) = (y' \xrightarrow{a'} x) \circ (y \xrightarrow{c} y') = (y \xrightarrow{a} x) ,$$

ce qui montre que $(x, y'; a', b')^{-1} \circ (x, y; a, b) = id_x$. Si enfin, x, y, y' sont alignés, on applique deux fois ce qui précède en considérant y'' en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et a'', b'' sur la droite $\langle x, y'' \rangle$ tels que $r(x, y; a, b) = r(x, y''; a'', b'')$. $\square$

2. GROUPOÏDES ET GRASSMANNIENNES

2.1 PRÉSENTATION PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

On se propose de généraliser ce qui précède aux groupoïdes $\mathscr{V}_{n,l}$ de la définition 1 et aux grassmanniennes.

DÉFINITION 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *on note* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *le groupoïde décrit par générateurs et relations comme suit.*

i) *Les objets de* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *sont les mêmes que ceux de* $\mathscr{V}_{n,l}$.

ii) *Les générateurs sont les isomorphismes linéaires* $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ *où* E_1 *et* E_2 *sont transverses.*

iii) *Si* $\star$ *désigne la composition des morphismes dans* $\mathscr{V}'_{n,l}$, *les relations sont du type:* $v \star u = v \circ u$, *chaque fois que* $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ *et* $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ *sont deux isomorphismes tels que* E_1, E_2 *et* E_3 *soient en somme directe.*

DÉFINITION 4. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *on introduit un troisième groupoïde* $\mathscr{G}_{n,l}$, *défini en terme de la géométrie de* $\mathbf{P}^n(F)$ *comme suit.*

i) *Les objets de* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont les sous-espaces projectifs de dimension* $l - 1$ *de l'espace projectif* $\mathbf{P}^n(F)$.

ii) *Les générateurs sont de la forme:* $f = (X \xrightarrow{A} Y)$ *où* X, Y, A *sont trois sous-espaces de dimension* $l - 1$ *de* $\mathbf{P}^n(F)$, *2 à 2 disjoints et* $A \subset \langle X, Y \rangle \cong \mathbf{P}^{2l-1}(F)$; *ici* $\langle X, Y \rangle$ *désigne le sous-espace projectif engendré par* $X \cup Y$.

iii) *Les relations sont du type* $g \circ f = h$, *où* $f = (X \xrightarrow{A} Y)$, $g = (Y \xrightarrow{B} Z)$ *et* $h = (X \xrightarrow{C} Z)$ *sont tels que* $\dim \langle X, Y, Z \rangle = 3l - 1$ *et où* $C = \langle X, Z \rangle \cap \langle A, B \rangle$.

THÉORÈME 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *les groupoïdes* $\mathscr{V}_{n,l}$ *et* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont isomorphes.*

Cela résulte de deux propositions.

PROPOSITION 2. *Quelque soit* $n \geqslant 3l - 1$, *le morphisme naturel* $\mathscr{V}'_{n,l} \to \mathscr{V}_{n,l}$ *est un isomorphisme.*

PROPOSITION 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *les groupoïdes* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *et* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont naturellement isomorphes.*

Preuve de la proposition 2. Le morphisme naturel $\mathscr{V}'_{n,l} \to \mathscr{V}_{n,l}$ est bijectif sur les objets. Le point crucial est de voir qu'il est bijectif sur les automorphismes. Noter que $\mathscr{V}'_{n,l}$ est connexe car, étant donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de dimension l de F^{n+1}, il en existe un troisième qui leur est transverse. Si $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ est un générateur de $\mathscr{V}'_{n,l}$, l'inverse de u dans $\mathscr{V}'_{n,l}$ coïncide avec l'inverse u^{-1} de u dans $\mathscr{V}_{n,l}$. En effet soit $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ avec E_1, E_2 et E_3 en position générale, on a successivement

$$(v \star u) \star u^{-1} = (v \circ u) \star u^{-1} = (v \circ u) \circ u^{-1} = v .$$

Tout morphisme $E \to E'$ dans $\mathscr{V}'_{n,l}$ s'écrit comme une composition $u_r \star u_{r-1} \star \cdots \star u_0$

$$E = E_0 \xrightarrow{u_1} E_1 \to \cdots \to E_{r-1} \xrightarrow{u_r} E_r = E' ,$$

où E_i et E_{i+1} sont transverses. Un tel morphisme a un représentant de la forme

$$E \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} E' ,$$

où H est transverse à E et E'.

Il suffit de le prouver pour $r = 3$. Dans ce cas particulier, on a l'assertion suivante quelque soit le corps F:

LEMME 1. *Dans la situation ci-dessus où* $r = 3$, *il existe* H *de dimension* l *tel que* H, E_0, E_1, H, E_1, E_2 *et* H, E_2, E_3 *soient respectivement en somme directe.*

Reportons la preuve du lemme et soit $w: E_2 \to H$, si on pose $v = u_3 \circ w^{-1}$ et $u = w \circ u_2 \circ u_1$, on a les relations

$$u_3 \star u_2 \star u_1 = u_3 \star (w^{-1} \star w) \star u_2 \star u_1$$
$$= (u_3 \star w^{-1}) \star ((w \star u_2) \star u_1) = (u_3 \circ w^{-1}) \star (w \circ u_2 \circ u_1) = v \star u ,$$

d'où la réduction.

Soit maintenant un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dr, "v"] & \\
E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & E \\
 & H' \arrow[ur, "v'"'] &
\end{tikzcd}$$

où u, u', v et v' sont des générateurs de $\mathscr{V}'_{n,l}$. Il reste à montrer que, si un tel diagramme commute dans $\mathscr{V}_{n,l}$, alors il commute aussi dans $\mathscr{V}'_{n,l}$. Si E, H et H' sont en somme directe, on a successivement

$$u \star u'^{-1} = (u \circ u'^{-1}) = (v'^{-1} \circ v) = v'^{-1} \star v ,$$

d'où $v' \star u' = v \star u$. Sinon on considère $E \xrightarrow{u''} H'' \xrightarrow{v''} E$ de telle sorte que $v'' \circ u'' = v \circ u$ avec E, H, H'' et E, H', H'' en somme directe, et on applique deux fois ce qui précède. $\square$

Preuve du lemme 1. Soient $V_1 = E_0 \oplus E_1$, $V_2 = E_1 \oplus E_2$ et $V_3 = E_2 \oplus E_3$, on veut trouver un sous-espace de dimension l de F^{n+1} transverse aux V_i. En considérant un sous-espace E de F^{n+1} de dimension $3l$ contenant V_2, on se ramène facilement au cas où $dim(V_1 + V_2 + V_3) \leqslant 3l$. On peut alors écrire

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_2 \oplus S \oplus T_1 \oplus T_3 ,$$

où $S \subset V_1 \cap V_3$, $T_1 \subset V_1$, $T_3 \subset V_3$ et T_1 (resp. T_3) est transverse à V_3 (resp. V_1). Soit $\alpha = dim S$, $\beta_1 = dim T_1$ et $\beta_3 = dim T_3$, il suffit alors de trouver un sous-espace H' de $V_1 + V_2 + V_3$ de dimension $\alpha + \beta_1 + \beta_3$ transverse à chacun des V_i.

On a les inégalités $\alpha + \beta_1 \leqslant l$ et $\alpha + \beta_2 \leqslant l$; par suite, il existe des sous-espaces, en somme directe, T_1' et S' de E_2 (resp. T_3' et S'' de E_1) vérifiant les conditions: $dim T_1' = \beta_1$, $dim T_3' = \beta_3$, $dim S' = dim S'' = \alpha$, $(T_1' \oplus S') \cap V_1 = \{0\}$ et $(T_3' \oplus S'') \cap V_3 = \{0\}$.

Soit alors $\tilde{S}$ un sous-espace de $S \oplus S' \oplus S''$, de dimension α, transverse à $S \oplus S'$, $S \oplus S''$ et $S' \oplus S''$. Soit de même $\tilde{T}_1$ (resp. $\tilde{T}_3$) un sous-espace de $T_1 \oplus T_1'$ (resp. $T_3 \oplus T_3'$) de dimension β_1 (resp. β_3) transverse à T_1 et T_1' (resp. T_3 et T_3'). La somme directe $\tilde{S} \oplus \tilde{T}_1 \oplus \tilde{T}_3$ est le sous-espace H' cherché. $\square$

Preuve de la proposition 3. Soit $p: F^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(F)$ la projection, on considère la bijection $\psi: Obj(\mathscr{G}'_{n,l}) \to Obj(\mathscr{G}_{n,l})$ donnée par $\psi(E) = p(E \setminus \{0\})$. On va prolonger ψ en une bijection notée aussi ψ de l'ensemble des générateurs de $\mathscr{V}'_{n,l}$ sur l'ensemble des générateurs de $\mathscr{G}_{n,l}$ respectant les relations.

Si $u: E \to H$ est un générateur de $\mathscr{V}'_{n,l}$, le sous-espace $J = \{u(x) - x : x \in E\}$ de F^{n+1} est de dimension l car $E \cap H = \{0\}$. Posons alors

$$\psi(E \xrightarrow{u} H) = X \xrightarrow{A} Y ,$$

où $X = p(E \setminus \{0\})$, $Y = p(H \setminus \{0\})$ et $A = p(J \setminus \{0\})$. Cette application est bijective; on a en effet

$$\psi^{-1}(X \xrightarrow{A} Y) = p^{-1}(X) \xrightarrow{u} p^{-1}(Y),$$

où pour $x \in p^{-1}(X)$, $u(x)$ est l'unique élément y de $p^{-1}(Y)$ tel que $p(y - x) \in A$: noter qu'il existe une unique droite projective Δ passant par $p(x)$ et rencontrant A et Y. Lorsque $l = 2$, penser à la surface réglée engendrée par trois droites en position générale.

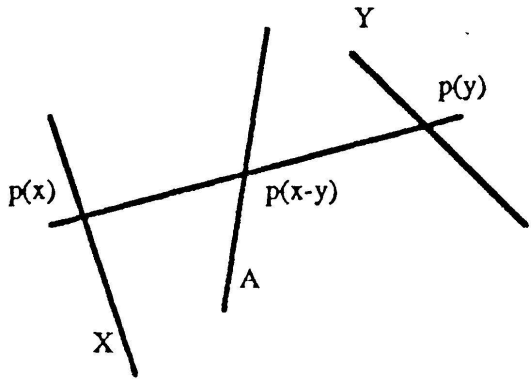

FIGURE 7

Il reste à voir que ψ respecte les relations. Soit E_1, E_2, E_3 en somme directe et soit de plus $u_1 : E_1 \to E_2$ et $u_2 : E_2 \to E_3$; posons pour $i = 1, 2$

$$J_i = \{u_i(x) - x : x \in E_i\} .$$

Comme

$$(u_2 \circ u_1)(x) - x = (u_2(u_1(x)) - u_1 x) + (u_1(x) - x) ,$$

on a

$$\{(u_2 \circ u_1)(x) - x : x \in E_1\} \subset (J_1 \oplus J_2) \cap (E_1 \oplus E_2) .$$

L'égalité résulte de l'égalité des dimensions. $\square$

2.2 INVARIANTS PROJECTIFS DE QUADRUPLETS DE SOUS-ESPACES DE DIMENSION $l - 1$ DE $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$

On peut formuler dans le cadre de ce qui précède des invariants projectifs de quatre sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui généralisent le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Pour cela, revenons au groupoïde $\mathscr{V}_{n,l}$. On considère la réunion disjointe des groupes d'automorphismes de $\mathscr{V}_{n,l}$

$$\mathbf{A} := \coprod_{E \subset F^{n+1}}^{\dim E = l} GL(E) .$$

Le groupe linéaire $GL(n + 1, F)$ opère par conjugaison dans $\mathbf{A}$. Pour $f \in \mathbf{A}$, soit

$$X^l - a_1(f) X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l(f) ,$$

son polynôme caractéristique. Les a_i sont des fonctions invariantes par l'action de $GL(n+1, F)$ sur $\mathbf{A}$. En composant ces fonctions avec l'isomorphisme de groupoïdes du théorème 3, on obtient pour $l \geqslant 1$ et $n \geqslant 3l - 1$, des fonctions c_i sur

$$\coprod_{X \in Obj(\mathscr{G}_{n,l})} Aut(X)$$

qui sont invariantes par l'action du groupe projectif $PGL(n+1, F)$ sur $\mathscr{G}_{n,l}$.

On en déduit des invariants projectifs qui sont des analogues du birapport. Par exemple, si X, Y, A, B sont quatre sous-espaces projectifs de dimension $l-1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$, tels que X, Y, A et X, Y, B soient respectivement en position générale, alors les éléments de F donnés par les $c_i((Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y))$ sont des invariants projectifs de la configuration constituée par ces quatre sous-espaces.

On sait que «en général» (au sens de la géométrie énumérative et pour un corps algébriquement clos, voir par exemple [6] p. 272 et [11] p. 206), si X, Y, A, B sont quatre sous-espaces de dimension $l-1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ deux à deux disjoints, il existe exactement l droites $(\Delta_j)_{j=1,\cdots,l}$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui rencontrent à la fois X, Y, A et B.

Supposons que X, Y, A, B soit une telle configuration; notons x_j, y_j, a_j, b_j les points d'intersection respectifs de Δ_j avec X, Y, A et B, et soit α_j le birapport $r(x_j, y_j; a_j, b_j)$. Alors, si le corps F a au moins $l+1$ éléments, les α_j sont deux à deux distincts et coïncident avec les valeurs propres de $(Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)$, d'où les relations

$$c_i((Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)) = \sigma_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_l) ,$$

où σ_i désigne la i-ième fonction symétrique élémentaire de l variables.

En effet notons E le sous-espace de dimension l de F^{2l} tel que $p(E \setminus \{0\}) = X$ dans la projection de $F^{2l} \setminus \{0\}$ sur $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$; soit D_j la droite de E au-dessus de x_j; soit de plus f l'élément de $GL(E)$ correspondant à $(Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)$. En reprenant des arguments contenus dans les preuves des théorèmes 2 et 3, on montre qu'une droite vectorielle D de E est une droite propre de f si et seulement si il existe une droite (unique) Δ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ passant par le point $x := p(D \setminus \{0\})$ et rencontrant Y, A, et B; de plus la valeur propre correspondante est le birapport $r(x, y; a, b)$, où y, a, b sont les points d'intersection de Δ avec Y, A, et B. On voit donc que les α_j sont valeurs propres de f; de plus ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, sinon f admettrait un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2, ce qui entraînerait l'existence d'au moins $card(\mathbf{P}^1(F))$

$= card(F) + 1$ droites distinctes de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ rencontrant X, Y, A, et B, mais $card(\mathbf{P}^1(F)) > l$, par hypothèse sur F. Il en résulte que f est diagonalisable et que les x_j sont en position générale dans X, car les D_j sont en somme directe.

On peut aussi montrer que les birapports α_j donc aussi les c_j caractérisent, dans la situation ci-dessus, la configuration X, Y, A, B à transformation projective près.

3. Homologie du groupe linéaire et géométrie projective

3.1 Homologie du groupe multiplicatif d'un corps et espace projectif infini

A la place des configurations de Menelaüs, on aurait pu utiliser dans la définition du groupoïde $\mathcal{G}_n$ les configurations de Ceva comme sur la figure 8.

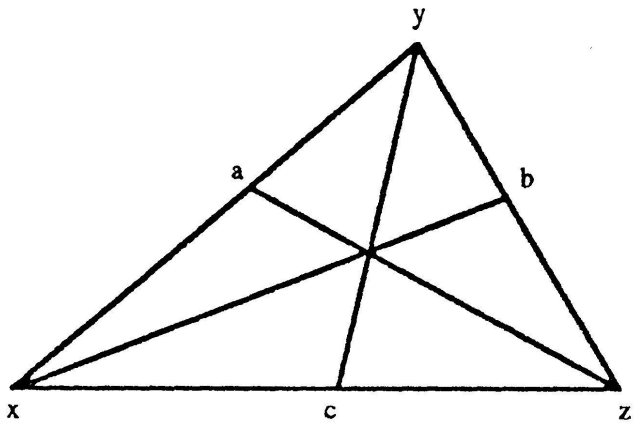

Figure 8

On rappelle que le théorème de Ceva exprime le fait que les droites $\langle x, b\rangle$, $\langle y, c\rangle$ et $\langle z, a\rangle$ de la figure 8 sont concourrantes par la condition affine $\frac{ax}{ay}\frac{by}{bz}\frac{cz}{cx} = -1$.

Définition 5. *On note $\mathcal{G}'_n$ le groupoïde ainsi obtenu.*

Le groupoïde $\mathcal{G}'_n$ est isomorphe à $\mathcal{G}_n$. L'isomorphisme avec $\mathcal{V}_n$ est d'ailleurs plus naturel que son analogue pour $\mathcal{G}_n$. Si F est de caractéristique 2, on a l'égalité $\mathcal{G}'_n = \mathcal{G}_n$; en effet les points a, b, c de la figure 8 sont alors alignés et dans ce cas les configurations de Menelaüs et celles de Ceva coïncident. Noter aussi que sans hypothèse sur F, on obtient un isomorphisme entre $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}'_n$, en termes de générateurs, en associant au générateur $(x \xrightarrow{a} y)$ de $\mathcal{G}_n$, le générateur $(x \xrightarrow{a'} y)$ de $\mathcal{G}'_n$, où a' est le