2.1 Présentation par générateurs et relations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

au-dessus de x, y, a, b tels que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ et $\vec{b} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$, alors $\varphi(f)(\vec{x}) = \varphi(h)(-\vec{y}) = \lambda\vec{x}$, donc $\varphi(f)$ est la multiplication par λ. D'autre part $\lambda = r(x, y; a, b)$; en effet si on envoie x à l'infini et si on prend y pour origine de la droite affine ainsi obtenue, les coordonnées de a et b sont respectivement 1 et λ, mais $r(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$.

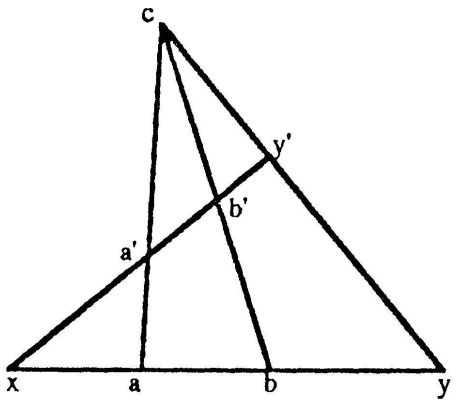

FIGURE 6

Pour achever la preuve, montrons que $\varphi : Aut(x) \to Aut(\varphi(x))$ est injective. Notons $(x, y; a, b)$ l'automorphisme de x: $(y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$, et prouvons que si $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$, alors $(x, y; a, b) = (x, y'; a', b')$. On peut supposer que $a \neq b$ et $a' \neq b'$. Si x, y, y' ne sont pas alignés, par l'invariance projective du birapport l'égalité $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$ entraîne que les droites $\langle y, y' \rangle$, $\langle a, a' \rangle$ et $\langle b, b' \rangle$ sont concourrantes. Mais alors en utilisant les relations de définition de $\mathscr{G}_n$, on a successivement

$$(y' \xrightarrow{a'} x) \circ (x \xrightarrow{b'} y') \circ (y \xrightarrow{b} x) = (y' \xrightarrow{a'} x) \circ (y \xrightarrow{c} y') = (y \xrightarrow{a} x) ,$$

ce qui montre que $(x, y'; a', b')^{-1} \circ (x, y; a, b) = id_x$. Si enfin, x, y, y' sont alignés, on applique deux fois ce qui précède en considérant y'' en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et a'', b'' sur la droite $\langle x, y'' \rangle$ tels que $r(x, y; a, b) = r(x, y''; a'', b'')$. $\square$

2. GROUPOÏDES ET GRASSMANNIENNES

2.1 PRÉSENTATION PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

On se propose de généraliser ce qui précède aux groupoïdes $\mathscr{V}_{n,l}$ de la définition 1 et aux grassmanniennes.

DÉFINITION 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *on note* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *le groupoïde décrit par générateurs et relations comme suit.*

i) *Les objets de* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *sont les mêmes que ceux de* $\mathscr{V}_{n,l}$.

ii) *Les générateurs sont les isomorphismes linéaires* $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ *où* E_1 *et* E_2 *sont transverses.*

iii) *Si* $\star$ *désigne la composition des morphismes dans* $\mathscr{V}'_{n,l}$, *les relations sont du type:* $v \star u = v \circ u$, *chaque fois que* $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ *et* $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ *sont deux isomorphismes tels que* E_1, E_2 *et* E_3 *soient en somme directe.*

DÉFINITION 4. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *on introduit un troisième groupoïde* $\mathscr{G}_{n,l}$, *défini en terme de la géométrie de* $\mathbf{P}^n(F)$ *comme suit.*

i) *Les objets de* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont les sous-espaces projectifs de dimension* $l - 1$ *de l'espace projectif* $\mathbf{P}^n(F)$.

ii) *Les générateurs sont de la forme:* $f = (X \xrightarrow{A} Y)$ *où* X, Y, A *sont trois sous-espaces de dimension* $l - 1$ *de* $\mathbf{P}^n(F)$, *2 à 2 disjoints et* $A \subset \langle X, Y \rangle \cong \mathbf{P}^{2l-1}(F)$; *ici* $\langle X, Y \rangle$ *désigne le sous-espace projectif engendré par* $X \cup Y$.

iii) *Les relations sont du type* $g \circ f = h$, *où* $f = (X \xrightarrow{A} Y)$, $g = (Y \xrightarrow{B} Z)$ *et* $h = (X \xrightarrow{C} Z)$ *sont tels que* $\dim \langle X, Y, Z \rangle = 3l - 1$ *et où* $C = \langle X, Z \rangle \cap \langle A, B \rangle$.

THÉORÈME 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *les groupoïdes* $\mathscr{V}_{n,l}$ *et* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont isomorphes.*

Cela résulte de deux propositions.

PROPOSITION 2. *Quelque soit* $n \geqslant 3l - 1$, *le morphisme naturel* $\mathscr{V}'_{n,l} \to \mathscr{V}_{n,l}$ *est un isomorphisme.*

PROPOSITION 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *les groupoïdes* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *et* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont naturellement isomorphes.*

Preuve de la proposition 2. Le morphisme naturel $\mathscr{V}'_{n,l} \to \mathscr{V}_{n,l}$ est bijectif sur les objets. Le point crucial est de voir qu'il est bijectif sur les automorphismes. Noter que $\mathscr{V}'_{n,l}$ est connexe car, étant donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de dimension l de F^{n+1}, il en existe un troisième qui leur est transverse. Si $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ est un générateur de $\mathscr{V}'_{n,l}$, l'inverse de u dans $\mathscr{V}'_{n,l}$ coïncide avec l'inverse u^{-1} de u dans $\mathscr{V}_{n,l}$. En effet soit $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ avec E_1, E_2 et E_3 en position générale, on a successivement

$$(v \star u) \star u^{-1} = (v \circ u) \star u^{-1} = (v \circ u) \circ u^{-1} = v .$$

Tout morphisme $E \to E'$ dans $\mathscr{V}'_{n,l}$ s'écrit comme une composition $u_r \star u_{r-1} \star \cdots \star u_0$

$$E = E_0 \xrightarrow{u_1} E_1 \to \cdots \to E_{r-1} \xrightarrow{u_r} E_r = E' ,$$

où E_i et E_{i+1} sont transverses. Un tel morphisme a un représentant de la forme

$$E \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} E' ,$$

où H est transverse à E et E'.

Il suffit de le prouver pour $r = 3$. Dans ce cas particulier, on a l'assertion suivante quelque soit le corps F:

LEMME 1. *Dans la situation ci-dessus où* $r = 3$, *il existe* H *de dimension* l *tel que* H, E_0, E_1, H, E_1, E_2 *et* H, E_2, E_3 *soient respectivement en somme directe.*

Reportons la preuve du lemme et soit $w: E_2 \to H$, si on pose $v = u_3 \circ w^{-1}$ et $u = w \circ u_2 \circ u_1$, on a les relations

$$u_3 \star u_2 \star u_1 = u_3 \star (w^{-1} \star w) \star u_2 \star u_1$$
$$= (u_3 \star w^{-1}) \star ((w \star u_2) \star u_1) = (u_3 \circ w^{-1}) \star (w \circ u_2 \circ u_1) = v \star u ,$$

d'où la réduction.

Soit maintenant un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dr, "v"] & \\
E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & E \\
 & H' \arrow[ur, "v'"'] &
\end{tikzcd}$$

où u, u', v et v' sont des générateurs de $\mathscr{V}'_{n,l}$. Il reste à montrer que, si un tel diagramme commute dans $\mathscr{V}_{n,l}$, alors il commute aussi dans $\mathscr{V}'_{n,l}$. Si E, H et H' sont en somme directe, on a successivement

$$u \star u'^{-1} = (u \circ u'^{-1}) = (v'^{-1} \circ v) = v'^{-1} \star v ,$$

d'où $v' \star u' = v \star u$. Sinon on considère $E \xrightarrow{u''} H'' \xrightarrow{v''} E$ de telle sorte que $v'' \circ u'' = v \circ u$ avec E, H, H'' et E, H', H'' en somme directe, et on applique deux fois ce qui précède. $\square$

Preuve du lemme 1. Soient $V_1 = E_0 \oplus E_1$, $V_2 = E_1 \oplus E_2$ et $V_3 = E_2 \oplus E_3$, on veut trouver un sous-espace de dimension l de F^{n+1} transverse aux V_i. En considérant un sous-espace E de F^{n+1} de dimension $3l$ contenant V_2, on se ramène facilement au cas où $dim(V_1 + V_2 + V_3) \leqslant 3l$. On peut alors écrire

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_2 \oplus S \oplus T_1 \oplus T_3 ,$$

où $S \subset V_1 \cap V_3$, $T_1 \subset V_1$, $T_3 \subset V_3$ et T_1 (resp. T_3) est transverse à V_3 (resp. V_1). Soit $\alpha = dim S$, $\beta_1 = dim T_1$ et $\beta_3 = dim T_3$, il suffit alors de trouver un sous-espace H' de $V_1 + V_2 + V_3$ de dimension $\alpha + \beta_1 + \beta_3$ transverse à chacun des V_i.

On a les inégalités $\alpha + \beta_1 \leqslant l$ et $\alpha + \beta_2 \leqslant l$; par suite, il existe des sous-espaces, en somme directe, T_1' et S' de E_2 (resp. T_3' et S'' de E_1) vérifiant les conditions: $dim T_1' = \beta_1$, $dim T_3' = \beta_3$, $dim S' = dim S'' = \alpha$, $(T_1' \oplus S') \cap V_1 = \{0\}$ et $(T_3' \oplus S'') \cap V_3 = \{0\}$.

Soit alors $\tilde{S}$ un sous-espace de $S \oplus S' \oplus S''$, de dimension α, transverse à $S \oplus S'$, $S \oplus S''$ et $S' \oplus S''$. Soit de même $\tilde{T}_1$ (resp. $\tilde{T}_3$) un sous-espace de $T_1 \oplus T_1'$ (resp. $T_3 \oplus T_3'$) de dimension β_1 (resp. β_3) transverse à T_1 et T_1' (resp. T_3 et T_3'). La somme directe $\tilde{S} \oplus \tilde{T}_1 \oplus \tilde{T}_3$ est le sous-espace H' cherché. $\square$

Preuve de la proposition 3. Soit $p: F^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(F)$ la projection, on considère la bijection $\psi: Obj(\mathscr{G}'_{n,l}) \to Obj(\mathscr{G}_{n,l})$ donnée par $\psi(E) = p(E \setminus \{0\})$. On va prolonger ψ en une bijection notée aussi ψ de l'ensemble des générateurs de $\mathscr{V}'_{n,l}$ sur l'ensemble des générateurs de $\mathscr{G}_{n,l}$ respectant les relations.

Si $u: E \to H$ est un générateur de $\mathscr{V}'_{n,l}$, le sous-espace $J = \{u(x) - x : x \in E\}$ de F^{n+1} est de dimension l car $E \cap H = \{0\}$. Posons alors

$$\psi(E \xrightarrow{u} H) = X \xrightarrow{A} Y ,$$

où $X = p(E \setminus \{0\})$, $Y = p(H \setminus \{0\})$ et $A = p(J \setminus \{0\})$. Cette application est bijective; on a en effet

$$\psi^{-1}(X \xrightarrow{A} Y) = p^{-1}(X) \xrightarrow{u} p^{-1}(Y),$$

où pour $x \in p^{-1}(X)$, $u(x)$ est l'unique élément y de $p^{-1}(Y)$ tel que $p(y - x) \in A$: noter qu'il existe une unique droite projective Δ passant par $p(x)$ et rencontrant A et Y. Lorsque $l = 2$, penser à la surface réglée engendrée par trois droites en position générale.

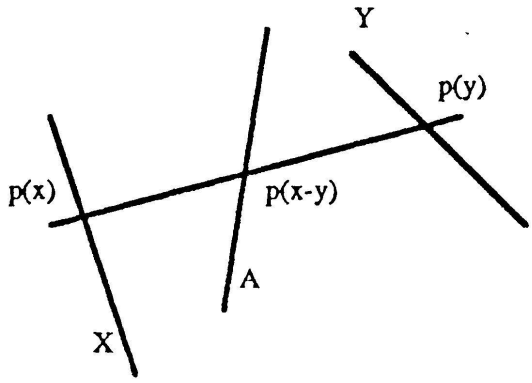

FIGURE 7

Il reste à voir que ψ respecte les relations. Soit E_1, E_2, E_3 en somme directe et soit de plus $u_1 : E_1 \to E_2$ et $u_2 : E_2 \to E_3$; posons pour $i = 1, 2$

$$J_i = \{u_i(x) - x : x \in E_i\} .$$

Comme

$$(u_2 \circ u_1)(x) - x = (u_2(u_1(x)) - u_1 x) + (u_1(x) - x) ,$$

on a

$$\{(u_2 \circ u_1)(x) - x : x \in E_1\} \subset (J_1 \oplus J_2) \cap (E_1 \oplus E_2) .$$

L'égalité résulte de l'égalité des dimensions. $\square$

2.2 INVARIANTS PROJECTIFS DE QUADRUPLETS DE SOUS-ESPACES DE DIMENSION $l - 1$ DE $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$

On peut formuler dans le cadre de ce qui précède des invariants projectifs de quatre sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui généralisent le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Pour cela, revenons au groupoïde $\mathscr{V}_{n,l}$. On considère la réunion disjointe des groupes d'automorphismes de $\mathscr{V}_{n,l}$

$$\mathbf{A} := \coprod_{E \subset F^{n+1}}^{\dim E = l} GL(E) .$$

Le groupe linéaire $GL(n + 1, F)$ opère par conjugaison dans $\mathbf{A}$. Pour $f \in \mathbf{A}$, soit

$$X^l - a_1(f) X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l(f) ,$$