3.2 Homologie du groupe linéaire et grassmanniennes infinies

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$= (\lambda v_0, \ldots, \lambda v_n)$. Pour l'acyclicité, on remarque que si $d(\sum_i (v_0^i, \ldots, v_n^i)) = 0$, on peut choisir un vecteur v de $F^{(\mathbf{N})}$ indépendant de tous les v_j^i et alors on vérifie que $\sum_i (v_0^i, \ldots, v_n^i) = d(\sum_i (v, v_0^i, \ldots, v_n^i))$. Pour terminer la preuve, il suffit d'observer que le complexe des coinvariants de (2), sous l'action de $\mathbf{Z}[F^\times]$, s'identifie au complexe (1); cela résulte du fait que les orbites de $\mathscr{C}_n$ sous l'action de $F^\times$ sont en bijection naturelle avec les éléments de $\mathscr{R}_n$; en effet à l'orbite de l'élément $(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathscr{C}_n$ est associé le n-repère projectif image de $(v_0, v_1, \ldots, v_n, \sum v_i)$ par p; inversement soit un repère projectif $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \omega)$ et soit D_i la droite au-dessus de x_i et Δ celle au-dessus de ω, ce repère provient de l'orbite de $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, où les v_i sont les éléments de la décomposition d'un vecteur de la droite Δ dans la somme directe des D_i. $\square$

Le groupe projectif $GP(F^{(\mathbf{N})})$ opère dans le complexe (1) par

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n, \omega) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(\omega)) .$$

L'action induite en homologie est triviale. Cela résulte d'un argument standard d'algèbre homologique (voir par exemple [2]); en effet cette action provient, par passage aux coinvariants, d'une action de $GL(F^{(\mathbf{N})})$ dans la résolution (2), action qui est triviale sur $\mathbf{Z}$ et coïncide avec l'action diagonale sur les éléments de $\mathscr{C}_n$; noter que cette action commute avec celle de $\mathbf{Z}[F^\times]$.

3.2 Homologie du groupe linéaire et grassmanniennes infinies

On va esquisser une description géométrique analogue pour l'homologie du groupe linéaire $GL(l, F)$ en utilisant les considérations du paragraphe 2. Relativement à la grassmannienne $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ des sous-espaces de dimension $l-1$ de $\mathbf{P}^\infty(F)$, on peut définir des groupoïdes $\mathscr{G}_{\infty, l}$ et $\mathscr{G}'_{\infty, l}$ analogues à $\mathscr{G}_\infty$ et $\mathscr{G}'_\infty$. Pour $n > 0$, $\mathscr{R}_n^l$ désigne l'ensemble des $(n+2)$-uplets $(X_0, X_1, \ldots, X_n, Y)$ d'éléments de $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ tels que $n+1$ d'entre eux soient en position générale dans $\mathbf{P}^\infty(F)$ et Y est contenu dans le sous-espace $\langle X_0, X_1, \ldots, X_n \rangle$: ces $(n+2)$-uplets jouent le rôle des repères projectifs; on pose de plus $\mathscr{R}_0^l = \mathbf{G}^{\infty, l}(F)$. On est conduit naturellement à la construction d'un complexe géométrique

$$\text{(3)} \qquad \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{R}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{R}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{R}_0^l] \to 0 ,$$

dont les groupes d'homologie coïncident avec ceux de $GL(l, F)$. Dans (3), $\mathbf{Z}[\mathscr{R}_n^l]$ est le $\mathbf{Z}$-module libre de générateurs les éléments de $\mathscr{R}_n^l$, et $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$, où

$$\partial_i(X_0, \ldots, X_n, Y) = (X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n, Y_i) ,$$

avec $Y_i = \langle X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n \rangle \cap \langle Y, X_i \rangle$. Le théorème 4 se généralise alors sous la forme suivante.

THÉORÈME 5. *L'homologie* $H_*(GL(l, F), \mathbf{Z})$ *du groupe linéaire* $GL(l, F)$ *est isomorphe à celle du complexe (3).*

Preuve. Il suffit encore de remarquer que le complexe (3) s'identifie au complexe des coinvariants d'une résolution de $\mathbf{Z}$ par des $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$-modules libres.

Pour cela, on introduit l'ensemble $\mathscr{C}^l_n$ des

$$((\overbrace{v^1_0, \ldots, v^l_0}^{V_0}), (\overbrace{v^1_1, \ldots, v^l_1}^{V_1}), \ldots, (\overbrace{v^1_n, \ldots, v^l_n}^{V_n})) ,$$

où $\{v^j_i\}_{i,j}$ est une famille libre de $F^{(\mathbf{N})}$. Le $\mathbf{Z}$-module libre $\mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_n]$ est aussi un $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$-module libre pour l'action définie comme suit: si $g = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant l}$ et $V = (v_1, \ldots, v_l)$, on pose $g.V = (\sum_j a_{1j} v_j, \ldots, \sum_j a_{lj} v_j)$ et $g.(V_0, \ldots, V_n) = (g.V_0, \ldots, g.V_n)$. On a alors une $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$-résolution acyclique de $\mathbf{Z}$

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_n] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_{n-1}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathscr{C}^l_0] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} ,$$

en posant $d(V_0, \ldots, V_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (V_0, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, V_n)$. Indiquons comment $\mathscr{R}^l_n$ paramétrise les orbites de $GL(l, F)$ dans $\mathscr{C}^l_n$. A l'orbite de l'élément $(V_0, \ldots, V_n) \in \mathscr{C}^l_n$ correspond l'élément $(X_0, X_1, \ldots, X_n, Y) \in \mathscr{R}^l_n$ défini comme suit: X_i est associé au sous-espace de $F^{(\mathbf{N})}$ engendré par $\{v^1_i, \ldots, v^l_i\}$ et Y à celui engendré par $\{\sum_{i=0}^n v^1_i, \ldots, \sum_{i=0}^n v^l_i\}$. $\square$

Comme au paragraphe précédent, l'action naturelle du groupe projectif $GP(F^{(\mathbf{N})})$ dans le complexe (3) induit l'action triviale en homologie.

A.A. Suslin [16] a prouvé le résultat de stabilité suivant

THÉORÈME 6. *Si* F *est un corps infini, le morphisme naturel en homologie*

$$H_n(GL(l, F), \mathbf{Z}) \to H_n(GL(l+1, F), \mathbf{Z}) ,$$

est un isomorphisme pour $l \geqslant n$.

Il serait intéressant de retrouver ce résultat de façon géométrique à l'aide de ce qui précède.