3. Perfection et eutaxie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Perfection et eutaxie

Le but de ce § est d'étendre au sous-espace $\mathscr{E}$ les notions classiques de Voronoï, qui correspondent au cas où $\mathscr{E}$ est l'espace $\mathrm{End}^s(E)$ tout entier.

Pour tout $x \in E$, on note φ_x la forme linéaire sur $\mathrm{End}^s(E)$ définie par

$$\varphi_x(v) = v(x).x .$$

3.1. Définitions. Soit $\mathscr{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}^s(E)$ et soit S un ensemble fini de vecteurs non nuls de E.

(1) S est *$\mathscr{E}$-parfait* si les restrictions à $\mathscr{E}$ des formes linéaires $\varphi_x, x \in S$, engendrent le dual $\mathscr{E}^*$ de $\mathscr{E}$, i.e. s'il n'existe pas dans $\mathscr{E}$ d'endomorphisme v non nul tel que $\varphi_x(v) = 0$ pour tout $x \in S$;

(2) S est *$\mathscr{E}$-eutactique* si la restriction à $\mathscr{E}$ de la forme linéaire trace (notée Tr) est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des restrictions à $\mathscr{E}$ des $\varphi_x, x \in S$.

On emploie la même terminologie pour un réseau en prenant pour ensemble S l'ensemble de ses vecteurs minimaux.

On remarque que, si S est parfait ou eutactique pour $\mathscr{E}$, il l'est également pour tout sous-espace vectoriel $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}$.

De même, il est clair que tout ensemble fini de vecteurs de E contenant un ensemble $\mathscr{E}$-parfait est $\mathscr{E}$-parfait.

On peut montrer que la propriété «$\mathscr{E}$-eutactique et $\mathscr{E}$-parfait» se transmet également; cela résulte par exemple de la caractérisation suivante:

3.2. Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un sous-espace vectoriel de E, et soit S un ensemble fini de vecteurs non nuls de E. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *S est à la fois $\mathscr{E}$-parfait et $\mathscr{E}$-eutactique,*

(2) *$v = 0$ est l'unique solution dans $\mathscr{E}$ du système d'inéquations linéaires*

$$\varphi_x(v) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in S \quad \textit{et} \quad \mathrm{Tr}(v) \leqslant 0 .$$

Démonstration. Supposons d'abord que S vérifie (1) et soit $v \in \mathscr{E}$ tel que

$$\varphi_x(v) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in S \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(v) \leqslant 0 .$$

Dans la relation de $\mathscr{E}$-eutaxie appliquée à v

$$\mathrm{Tr}(v) = \sum_{x \in S} \rho_x \varphi_x(v), \quad \rho_x > 0 \text{ pour tout } x ,$$

le premier membre est donc $\leqslant 0$ et le second $\geqslant 0$, ils sont donc nuls, et puisque tous les $\rho_x \varphi_x(v)$ sont positifs ou nuls et les ρ_x positifs strictement, on obtient $\varphi_x(v) = 0$ pour tout $x \in S$, donc $v = 0$ puisque S est $\mathscr{E}$-parfait. La condition (2) est donc vérifiée.

Réciproquement, supposons (2) vérifiée, et montrons que S est $\mathscr{E}$-parfait. Soit donc $v \in \mathscr{E}$ tel que $\varphi_x(v) = 0$ pour tout $x \in S$; comme $-v$ vérifie cette même hypothèse, on peut, quitte à changer v en $-v$, supposer $\mathrm{Tr}(v) \leqslant 0$. Par (2), v est donc nul.

Pour montrer la $\mathscr{E}$-eutaxie, ce qui achèvera la preuve de la proposition, on utilise le théorème de programmation linéaire dû à Stiemke et exhumé par Barnes ([St]):

3.3. THÉORÈME (STIEMKE). *Soit V un espace vectoriel réel de dimenson finie, et soient $F_1, F_2, \cdots, F_m$ des formes linéaires sur V. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *Toute solution $v \in V$ du système d'inéquations*

$$F_i(v) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots m\ ,$$

est solution du système d'équations

$$F_i(v) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\ .$$

(b) *Il existe des nombres réels $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ strictement positifs tels que $\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \cdots + \rho_m F_m = 0$.*

Appliquons ce résultat à $V = \mathscr{E}$, et aux restrictions à $\mathscr{E}$ des formes $-\mathrm{Tr}$ et $\varphi_x, x \in S$. La condition (b) ci-dessus est exactement la $\mathscr{E}$-eutaxie de S; quant à (a), elle est certainement vérifiée, puisque (2) dit que toute solution $v \in V$ du système d'inéquations est nulle. $\square$

Dans le cas où $\mathscr{E}$ contient l'identité Id, on peut le remplacer par l'hyperplan $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$, orthogonal à l'identité pour le produit scalaire $\langle v, v' \rangle = \mathrm{Tr}(vv')$,

$$\mathscr{E}_0 = \{v \in \mathscr{E} \mid \mathrm{Tr}(v) = 0\}\ .$$

3.4. PROPOSITION. *Soit $\mathscr{E}$ un sous-espace de $\mathrm{End}^s(E)$ contenant l'identité, soit $\mathscr{E}_0$ l'hyperplan de $\mathscr{E}$ formé des endomorphismes de trace nulle, et soit $S = \{x_1, \cdots, x_s\}$ un ensemble fini de vecteurs unitaires de E. On note φ^i la restriction à $\mathscr{E}$ de la forme linéaire φ_{x_i}, et φ_0^i sa restriction à $\mathscr{E}_0$. Alors:*

(1) *$\mathscr{E}$-eutaxie et $\mathscr{E}_0$-eutaxie sont équivalentes.*

(2) *Pour que* S *soit* $\mathscr{E}$*-parfait, il faut et il suffit qu'il soit* $\mathscr{E}_0$*-parfait et que les restrictions* φ_0^i *à* $\mathscr{E}_0$ *vérifient une relation*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \alpha_i \varphi_0^i = 0, \quad \textit{avec} \quad \sum_i \alpha_i \neq 0 .$$

(3) S *est* $\mathscr{E}$*-parfait et* $\mathscr{E}$*-eutactique si et seulement s'il est* $\mathscr{E}_0$*-parfait et* $\mathscr{E}_0$*-eutactique.*

Démonstration. (1) Supposons que S vérifie une relation $\sum_i \rho_i \varphi_0^i = 0$, $\rho_i > 0$, de $\mathscr{E}_0$-eutaxie. Alors il vérifie la relation de $\mathscr{E}$-eutaxie $\sum_i \frac{n\rho_i}{\sum \rho_i} \varphi^i = \mathrm{Tr}$. En effet, soit $v \in \mathscr{E}$ et soit $v_0 = v - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(v)\mathrm{Id}$ sa projection orthogonale sur $\mathscr{E}_0$. On a $\sum_i \rho_i \varphi^i(v_0) = 0$, c'est-à-dire

$$\sum_i \rho_i \varphi^i(v) = \frac{\sum_i \rho_i}{n} \mathrm{Tr}(v)\, \varphi^i(\mathrm{Id}) = \frac{\sum_i \rho_i}{n} \mathrm{Tr}(v) .$$

La réciproque est triviale.

(2) Si S est $\mathscr{E}$-parfait, il est trivialement $\mathscr{E}_0$-parfait; de plus, la restriction Tr à $\mathscr{E}$ de la forme trace s'écrit sur les φ^i (qui par hypothèse engendrent $\mathscr{E}^*$): $\mathrm{Tr} = \sum_i \alpha_i \varphi^i$, relation qui, appliquée à Id, donne $n = \sum_i \alpha_i$, et, par restriction à $\mathscr{E}_0$, $0 = \sum_i \alpha_i \varphi_0^i$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une relation $\sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \alpha_i \varphi_0^i = 0$, avec $\sum_i \alpha_i \neq 0$; soit $v = v_0 + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(v)\mathrm{Id}$, $v_0 \in \mathscr{E}_0$, un élément de $\mathscr{E}$ tel que $\varphi^i(v) = 0$ pour tout i. On a donc $\varphi_0^i(v_0) + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(v) = 0$ pour tout i, d'où l'on déduit $\sum_i \alpha_i \varphi_0^i(v_0) + \frac{\sum_i \alpha_i}{n}\mathrm{Tr}(v) = 0$, où $\sum_i \alpha_i \varphi_0^i(v_0) = 0$ et $\sum_i \alpha_i \neq 0$. Donc $\mathrm{Tr}(v) = 0$, et $v = v_0$ appartient à $\mathscr{E}_0$. Si S est $\mathscr{E}_0$-parfait, on déduit alors de la relation $\varphi^i(v) = 0$ pour tout i que v est nul. Ainsi, S est $\mathscr{E}$-parfait.

(3) se déduit immédiatement de (1) et (2), puisque toute relation de $\mathscr{E}_0$-eutaxie $\sum_i \rho_i \varphi_0^i = 0$, $\rho_i > 0$ est telle que $\sum \rho_i \neq 0$. $\square$

Au produit scalaire $\langle v, w \rangle = \mathrm{Tr}(vw)$ dans l'espace $\mathrm{End}^s(E)$ est associée une identification de $\mathrm{End}^s(E)$ à son dual, transformant $v \in \mathrm{End}^s(E)$ en $\varphi : w \mapsto \langle v, w \rangle$. Cette dualité associe à l'application identique la forme linéaire trace, et, pour $x \neq 0 \in E$, à la projection orthogonale p_x de E sur $\mathbf{R}x$ la forme linéaire $\frac{1}{N(x)}\varphi_x$.

La dualité du sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ sur son dual $\mathscr{E}^*$ induite par l'identification précédente est

$$\mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(v) \leftrightarrow \mathrm{restr}_{\mathscr{E}}(\varphi) ,$$

où $\mathrm{proj}_{\mathscr{E}}$ et $\mathrm{restr}_{\mathscr{E}}$ désignent respectivement la projection orthogonale sur $\mathscr{E}$ et la restriction à $\mathscr{E}$, comme on le voit en remarquant que, pour $w \in \mathscr{E}$, $\varphi(w) = \langle v, w \rangle = \langle \mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(v), w \rangle$.

C'est ainsi que l'ensemble fini S est $\mathscr{E}$-parfait (resp. $\mathscr{E}$-eutactique) si et seulement si les $\mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(p_x)$, $x \in S$, engendrent $\mathscr{E}$ (resp. s'il existe des coefficients ρ_x tous strictement positifs tels que $\mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(\mathrm{Id}) = \sum_x \rho_x \mathrm{proj}_{\mathscr{E}}(p_x)$).

4. Extrémalité dans $\mathscr{F}$

Pour faire une étude locale de la fonction d'Hermite dans la famille $\mathscr{F}$, on établit quelques résultats préliminaires relatifs à l'espace $\mathrm{End}^s(E)$ des endomorphismes symétriques de E, dont on note $\|\,.\,\|$ une norme.

On rappelle que l'on note exp l'application exponentielle de $\mathrm{End}(E)$ dans $\mathrm{Gl}(E)$; par restriction, elle induit un difféomorphisme de $\mathrm{End}^s(E)$ sur l'ensemble des automorphismes symétriques positifs de E.

Les deux énoncés suivants concernent le déterminant et la norme d'un réseau. Le premier, qui se démontre par un calcul de valeurs propres, est bien connu:

4.1. Lemme. *Pour tout* $v \in \mathrm{End}^s(E)$, *on a* $\det(\exp v) = e^{\mathrm{Tr}(v)}$.

4.2. Lemme.

(i) *Soit* $u \in \mathrm{Gl}(E)$ *et soit* $x \in E$. *On a* $N(u(x)) = N(x) + \varphi_x({}^t uu - \mathrm{Id})$.

(ii) *Pour tout* $v \in \mathrm{End}^s(E)$, *pour tout* $x \in E$, *on a* $\varphi_x(\exp(v) - \mathrm{Id}) \geqslant \varphi_x(v)$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* $v(x) = 0$ *(et alors les deux membres sont nuls).*

(iii) *Soit* S *un ensemble fini de vecteurs non nuls de* E *et soit* F *un cône fermé de* $\mathrm{End}^s(E)$ *tel que, pour tout* $v \neq 0$ *appartenant à* F, *le minimum* $\min_{x \in S} \varphi_x(v)$ *soit négatif. Alors, il existe* $\alpha > 0$ *tel que, pour tout* $v \in F$ *avec* $0 < \|v\| < \alpha$, *on ait* $\min_{x \in S} \varphi_x(\exp(v) - \mathrm{Id}) < 0$.

(iv) *Soit* L *un réseau et soit* S *l'ensemble de ses vecteurs minimaux. Pour* $u \in \mathrm{Gl}(E)$ *assez voisin de l'identité, on a* $N(u(L)) = N(L) + \min_{x \in S} \varphi_x({}^t uu - \mathrm{Id})$.

Démonstration. (i) On a

$$u(x) \,.\, u(x) - x \,.\, x = {}^t uu(x) \,.\, x - x \,.\, x = ({}^t uu - \mathrm{Id})\,(x) \,.\, x = \varphi_x({}^t uu - \mathrm{Id})\,.$$

On prouve (ii) et (iii) par un argument de convexité. On note Σ la sphère unité de $\mathrm{End}^s(E)$. Pour tout $w \in \Sigma$, pour tout $x \in E$, on remarque que la