Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 41 (1995), p. 63-102

STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(−1)-ESPACE

par Marc BOURDON

RÉSUMÉ. Soit X un CAT(-1)-espace. On montre que son bord admet une structure conforme canonique invariante par les isométries de X. Soit maintenant un groupe hyperbolique agissant sur X par isométries, de manière quasi-convexe. On étudie la structure conforme de son ensemble limite en liaison avec le flot géodésique.

ABSTRACT. Let X be a CAT(-1)-space. We show that its boundary admits a canonical conformal structure, invariant by the isometries of X. Now let Γ be a hyperbolic group acting on X by isometries, in a quasi-convex way. We study the conformal structure of its limit set linked with the geodesic flow.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 64

1. PRÉLIMINAIRES 65
   - 1.1. Généralités sur les espaces métriques 65
   - 1.2. Espaces hyperboliques géodésiques 67
   - 1.3. CAT$(-b^2)$-espaces 68
   - 1.4. Bord d'un espace hyperbolique 69
   - 1.5. Métriques visuelles sur ∂X 70
   - 1.6. Action au bord des quasi-isométries 72
   - 1.7. Groupes hyperboliques 77
   - 1.8. Groupes quasi-convexes 78

2. STRUCTURE CONFORME SUR LE BORD D'UN CAT(−1)-ESPACE. ENSEMBLE LIMITE ET FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉS À UNE ACTION QUASI-CONVEXE 80

2.0. Introduction 80
2.1. Fonctions de Busemann 82
2.2. Distances horosphériques 82
2.3. Horosphères 82
2.4. Produits de Gromov de deux éléments de ∂X 83
2.5. Une famille de métriques visuelles sur ∂X 84
2.6. Structure conforme sur ∂X 89
2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe 92
2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe 93
2.9. Le paramétrage de Hopf de $(\mathscr{E}, \Phi_T)$ 95
2.10. Mesure d'entropie maximale 96
2.11. Preuve du théorème 2.0.1 97

RÉFÉRENCES 101

INTRODUCTION

On étudie ici les actions isométriques quasi-convexes d'un groupe hyperbolique au sens de M. Gromov, sur les CAT(−1)-espaces. Ces espaces, qui remontent à Aleksandrov, connaissent depuis quelque temps déjà un regain d'intérêt sous l'impulsion de M. Gromov. Ils forment une vaste généralisation des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure inférieure à -1, les exemples les plus fameux étant les polyèdres hyperboliques de M. Gromov. Nous nous intéressons plus particulièrement au flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un tel espace, et à l'action du groupe sur son ensemble limite. Le principal résultat est le suivant:

Comme tout espace hyperbolique, un CAT(−1)-espace X admet un bord, lui-même muni d'une structure quasi-conforme canonique (un invariant de quasi-isométrie de X). La propriété CAT(−1) permet d'affiner cette structure: nous construisons sur ∂X une structure conforme canonique compatible avec sa structure quasi-conforme et invariante par les isométries de X. Elle est décrite par une famille de métriques visuelles deux à deux conformes que nous construisons à partir des fonctions de Busemann.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique Γ sur un CAT(−1)-espace X. On sait que l'ensemble limite

de Γ dans ∂X et le flot géodésique sont intimement liés au groupe. En effet si Γ agit comme précédemment sur deux CAT(−1)-espaces, alors les ensembles limites associés (qui sont canoniquement homéomorphes à $\partial\Gamma$) se correspondent par un homéomorphisme Ω, canonique, Γ-équivariant et quasi-conforme. De même, d'après une construction de M. Gromov, les espaces du flot géodésique se correspondent par une équivalence d'orbites (un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons que l'homéomorphisme quasi-conforme Ω est conforme si et seulement si l'équivalence d'orbites de M. Gromov est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbites qui préserve le paramétrage). Ainsi la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement. La preuve de ce résultat consiste en grande partie à adapter aux CAT(−1)-espaces certaines idées développées par Hopf, Patterson, Sullivan sur les variétés à courbure -1; en particulier les mesures conformes sur l'ensemble limite, et les mesures induites sur le carré de l'ensemble limite et sur l'espace du flot géodésique.

La première partie de cet article est plutôt destinée au lecteur peu familier de la théorie de M. Gromov des espaces hyperboliques. On y rappelle quelques notions et résultats fondamentaux concernant notamment: les CAT$(-b^2)$-espaces, le bord d'un espace hyperbolique et ses métriques visuelles, les actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique et leurs ensembles limites.

Dans la deuxième partie on construit la structure conforme du bord d'un CAT(−1)-espace. On définit le flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un CAT(−1)-espace. Enfin on montre que la structure conforme de l'ensemble limite caractérise le flot et inversement.

Je remercie Pierre Pansu qui a dirigé ma thèse que reprend en partie cet article.

1. Préliminaires

On rappelle dans ce chapitre les notions d'espaces et de groupes hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, on pourra se référer à [G], [G-H], [C-D-P], [C].

1.1. Généralités sur les espaces métriques

Sont rassemblées ici les définitions qui seront d'un usage constant.

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. Afin d'alléger les notations, la distance $d(x, x')$ sera souvent notée $|x - x'|$.

Quasi-isométrie: Une application $f: X \to Y$ est une (λ, k)-quasi-isométrie, si quels que soient les éléments x, x' de X:

$$\lambda^{-1} |x - x|_X - k \leqslant |f(x) - f(x')|_Y \leqslant \lambda |x - x'|_X + k .$$

On dit qu'elle est une quasi-isométrie, si l'on ne tient pas à préciser les constantes λ et k. Remarquons qu'une quasi-isométrie n'est pas en général continue.

Espaces quasi-isométriques: Les espaces métriques X et Y sont quasi-isométriques, s'ils satisfont l'une des deux conditions équivalentes suivantes:

(i) Il existe des quasi-isométries $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ et un réel $\varepsilon \geqslant 0$, tels que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient ε-proches de l'identité.

(ii) Il existe une quasi-isométrie $f: X \to Y$ et un réel $\varepsilon \geqslant 0$, tels que $f(X)$ soit ε-dense dans Y.

Rappelons qu'un sous-ensemble Z de Y est ε-dense, si le ε-voisinage de Z dans Y est Y.

Géodésiques: Un segment géodésique (resp. un rayon géodésique), (resp. une géodésique) de X, est une isométrie:

$$\gamma: I \to X$$

où I est un intervalle de $\mathbf{R}$, fermé borné, (resp. fermé semi-infini), (resp. $\mathbf{R}$).

Etant donné deux éléments x, x' de X, on notera $[xx']$ tout segment géodésique:

$$\gamma: [a, b] \to X; \quad \text{avec} \quad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = x' .$$

D'autre part, on se permettra souvent de confondre un segment géodésique, ou un rayon, ou une géodésique, avec son image.

Espaces géodésiques: L'espace X est géodésique, si deux éléments quelconques de X peuvent être reliés par un segment géodésique.

Quasi-géodésiques: Un (λ, k)-quasi-segment géodésique, (resp. rayon géodésique), (resp. géodésique) de X, est une (λ, k)-quasi-isométrie:

$$\gamma: I \to X$$

où I est un intervalle de $\mathbf{R}$, fermé borné, (resp. fermé semi-infini), (resp. $\mathbf{R}$). Si l'on ne tient pas à préciser les constantes λ et k, on dira seulement quasi-segment géodésique (resp. rayon), (resp. géodésique).

Quasi-convexe: Supposons X géodésique. Un sous-ensemble Z de X est C-quasi-convexe, si deux points quelconques de Z peuvent être reliés par un segment géodésique contenu dans le C-voisinage de Z dans X. Il est quasi-convexe, s'il est C-quasi-convexe pour un certain réel C.

1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Désormais, (X, d_X) est un espace métrique géodésique.

1.2.1. Définition

a) Le triangle $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X est δ-fin si pour tout u appartenant à $[xy]$, on a:

$$d_X(u, [yz] \cup [zx]) \leqslant \delta .$$

b) X est δ-hyperbolique si tout triangle de X est δ-fin. Il est hyperbolique, s'il est δ-hyperbolique pour un certain réel δ.

Observons qu'un espace δ-hyperbolique a la propriété suivante: deux segments géodésiques de mêmes extrémités, sont à distance de Hausdorff inférieure à δ. Autrement dit, chacun est contenu dans le δ-voisinage de l'autre.

1.2.2. Exemples (voir [C-D-P], chapitre 1, §4 et 5).

a) Un arbre métrique est 0-hyperbolique.

b) L'espace hyperbolique réel n-dimensionnel $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est log 3-hyperbolique.

c) D'après le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov, toute variété riemannienne simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

Une première propriété fondamentale des espaces hyperboliques est:

1.2.3. Théorème (Propriété des quasi-segments géodésiques).

Il existe une constante C ne dépendant que de λ, k, δ, avec la propriété suivante: tout (λ, k)-quasi-segment géodésique d'un espace δ-hyperbolique, est à distance de Hausdorff inférieure à C, de n'importe quel segment géodésique joignant ses extrémités.

Dont on déduit immédiatement:

1.2.4. Corollaire (Invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie).

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces géodésiques.

a) *Si* Y *est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de* X *dans* Y, *alors* X *est hyperbolique.*

b) *Si* X *et* Y *sont quasi-isométriques, alors* X *est hyperbolique si et seulement si* Y *l'est.*

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). *Soient* (X, d_X) (Y, d_Y) *deux espaces géodésiques et* f *une quasi-isométrie de* X *dans* Y. *Si* Y *est hyperbolique, l'image par* f *de tout quasi-convexe de* X *est un quasi-convexe de* Y.

1.3. CAT$(-b^2)$-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, et soit $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante $-b^2$.

A tout triangle $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X associons un triangle $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$ de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ dont les côtés ont même longueur que ceux de Δ. Le triangle $\bar{\Delta}$ est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à Δ. Soit:

$$\Delta \to \bar{\Delta}$$
$$s \mapsto \bar{s}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de Δ est une isométrie.

1.3.1. DÉFINITION

a) On dit que Δ satisfait CAT$(-b^2)$ (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient s, t appartenant à Δ:

$$d_X(s, t) \leqslant d_{\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}) .$$

b) X est un CAT$(-b^2)$-espace si tout triangle de X satisfait CAT$(-b^2)$.

Les CAT$(-b^2)$-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure $\leqslant -b^2$. En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

a) Deux points de X déterminent un unique segment géodésique.

b) X est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

c) X est contractible.

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de CAT$(-b^2)$-espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace X est dit à courbure inférieure ou égale à $-b^2$, si tout point de X admet un voisinage satisfaisant CAT$(-b^2)$. Si X est géodésique simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, alors X est un CAT$(-b^2)$-espace.

1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit (X, d_X) un espace δ-hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons $\mathscr{R}$ l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de X, on le note ∂X.

On définit une topologie sur $X \cup \partial X$, de la manière suivante:

Soit x une origine dans X, et soit $\mathscr{R}(x)$ l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma : I \to X$$

où I est un intervalle du type $[0, +\infty[$ ou $[0, a]$, $a \in \mathbf{R}^+$, et γ vérifie $\gamma(0) = x$. Si $I = [0, a]$, convenons de prolonger γ à $[0, +\infty[$, en posant $\gamma(t) = \gamma(a)$ pour t supérieur à a. Munissons $\mathscr{R}(x)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathscr{R}(x)$ est compact et l'application naturelle de $\mathscr{R}(x)$ dans $X \cup \partial X$ est surjective. Equipé de la topologie quotient, $X \cup \partial X$ est un compact, dans lequel l'espace métrique X est ouvert et dense. Ainsi le compact ∂X permet de compactifier X. On montre que la topologie est indépendante de l'origine x.

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent:

1.4.1. PROPOSITION

a) *Soit* $x \in X$, *et* $\xi \in \partial X$. *Il existe un rayon géodésique d'extrémités* x *et* ξ. *On le notera* $[x\xi)$. *Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 2δ.

b) *Soient* ξ *et* ξ' *deux points distincts de* ∂X. *Il existe une géodésique d'extrémités* ξ *et* ξ'. *On la notera* $(\xi\xi')$. *Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 4δ.

c) *(Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante* C *ne dépendant que de* δ, λ, k, *avec la propriété suivante: tout* (λ, k)*-quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de* X, *est à distance de Hausdorff inférieure à* C *d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de* X.

1.4.2. *Remarque.* Lorsque X est un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, deux points de $X \cup \partial X$ détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit X une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à $-b^2$. Etant donnée une origine x dans X, l'application exponentielle de l'espace tangent en x, induit un homéomorphisme de la sphère unité sur ∂X.

c) Soit X un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, et x une origine dans X. Notons $S(x, R)$ la sphère de centre x et de rayon R. Deux points de X déterminent un unique segment géodésique, donc pour $R \geqslant R'$, il existe une application naturelle de $S(x, R)$ dans $S(x, R')$. On montre que ∂X est homéomorphe à la limite projective des $S(x, R)$, lorsque R tend vers l'infini. Notons que le bord d'un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

De même qu'un changement conforme de métrique sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace δ-hyperbolique X,

afin que $X \cup \partial X$ soit le complété de X pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C-D-P], [C], pour plus de détails). Ainsi ∂X hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire:

1.5.1. DÉFINITION. Soit x une origine dans X. Une métrique $d_{\partial X}$ sur ∂X a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de X de la façon suivante: Il existe une constante $C \geqslant 1$ et un réel $t > 1$, tels que pour tous éléments ξ, ξ' de ∂X:

$$C^{-1} t^{-d} \leqslant d_{\partial X}(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} .$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi \xi')) .$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres (x, t).

L'énoncé précis est le suivant: ([G], §7.2, [C-D-P], chapitre 11):

1.5.2. THÉORÈME (Gromov). *Il existe un réel* $t_0 > 1$, *ne dépendant que de* δ, *tel que pour tout* t *appartenant à* $]1, t_0[$, *le bord de* X *admette une métrique visuelle de paramètres* (x, t).

1.5.3. *Remarques*

a) Pour les CAT$(-b^2)$-espaces, le résultat est plus fin: leur bord admet une métrique visuelle de paramètre t, quel que soit t appartenant à $]1, e^b]$. Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W. J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que e^b est optimal car il l'est sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

b) Deux métriques visuelles d et d' de paramètres respectifs (x, t) et (x', t') sont facilement comparables: Si $t = t'$, alors elles sont Lipschitz-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$, telle que:

$$D^{-1} d \leqslant d' \leqslant D d .$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$ et un réel $\alpha > 0$, tels que:

$$D^{-1} d^{\alpha} \leqslant d' \leqslant D d^{\alpha} .$$

Ici α est égal à $\log t' / \log t$.

c) D'après b), toute isométrie de X est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de X muni d'une métrique visuelle.

1.6. Action au bord des quasi-isométries

Commençons par rappeler la définition d'application quasi-conforme.

Un k-anneau, $k \geqslant 1$, d'un espace métrique (E, d), est un couple (B_1, B_2) de deux boules concentriques, dont les rayons r_1 et r_2 vérifient la relation:

$$r_2 = kr_1 .$$

Une application:

$$f : (E, d) \to (E', d')$$

est quasi-conforme (au sens des anneaux), s'il existe une fonction ψ de $[1, +\infty[$ dans lui-même, telle que l'image par f de tout k-anneau est contenue dans un $\psi(k)$-anneau de (E', d'). Autrement dit, si (B_1, B_2) est un k-anneau de (E, d), alors il existe un $\psi(k)$-anneau (B'_1, B'_2) de (E', d'), tel que:

$$B'_1 \subset f(B_1) \subset f(B_2) \subset B'_2 .$$

Notons en particulier que l'image d'une boule de (E, d) est contenue dans un $\psi(1)$-anneau de (E', d').

Un homéomorphisme f est quasi-conforme si f et f^{-1} sont quasi-conformes. De même, un plongement est quasi-conforme, s'il est un homéomorphisme quasi-conforme sur son image.

Afin de décrire les boules, et par suite les anneaux d'une métrique visuelle sur le bord d'un espace δ-hyperbolique, rappelons la notion classique d'ombre:

1.6.1. Définition (Margulis). Soit x une origine dans X. L'ombre portée à partir de x, de la boule $B(y, R)$ de X, est le sous-ensemble de ∂X

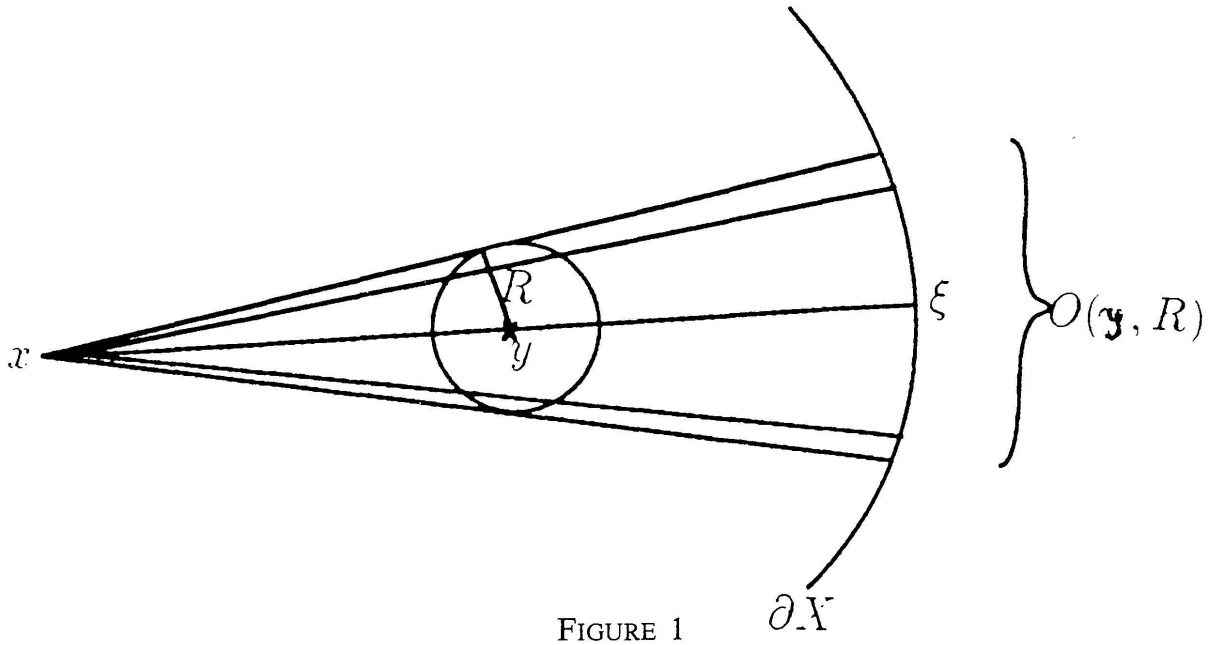

Figure 1

noté $O(y, R)$, des extrémités des rayons géodésiques issus de x passant par $B(y, R)$. On dit que $O(y, R)$ est centrée en ξ, si y appartient à un rayon géodésique $[x\xi)$. (Voir figure 1).

Etant donnée une métrique visuelle d de paramètres (x, t) sur ∂X, à l'ombre $O(y, R)$ attachons le rayon:

$$r(y) = t^{-|x-y|}.$$

La propriété de visibilité donne alors:

1.6.2. LEMME. *Pour R suffisamment grand, ($R \geqslant 5\delta$ convient), il existe une constante $D = D(R) \geqslant 1$, telle que pour toute boule $B(\xi, r)$ de $(\partial X, d)$, on puisse trouver des ombres $O(y_1, R)$ et $O(y_2, R)$ centrées en ξ, vérifiant:*

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R)$$

et

$$D^{-1} r(y_2) \leqslant r \leqslant D r(y_1).$$

Ainsi, les boules de $(\partial X, d)$ ressemblent aux ombres.

Preuve de 1.6.2. Rappelons qu'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que pour tout point ξ, ξ' de ∂X on ait:

(1) $$C^{-1} t^{-d} \leqslant d(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} \quad \text{avec} \quad d = d_X(x, (\xi\xi')).$$

D'autre part observons que tout triangle de $X \cup \partial X$ est 5δ-fin (voir 1.4.1.b)).

Soit $R \geqslant 5\delta$, ξ un point de ∂X, $B(\xi, r)$ une boule de ∂X centrée en ξ, et γ un rayon géodésique joignant x à ξ. Prenons y_2 le point de γ vérifiant:

$$|x - y_2| = \max\{0, -\log_t Cr - 5\delta - 1\}$$

et montrons que $B(\xi, r)$ est contenue dans $O(y_2, R)$. Soit ξ' un point de $B(\xi, r)$, le triangle $(x\xi\xi')$ étant 5δ-fin, on a:

$$d(y_2, [x\xi') \cup (\xi\xi')) \leqslant 5\delta.$$

Or par l'inégalité triangulaire et (1):

$$\begin{aligned} d(y_2, (\xi\xi')) &\geqslant d(x, (\xi\xi')) - |x - y_2| \\ &\geqslant -\log_t Cr - |x - y_2| \\ &\geqslant 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc: $d(y_2, [x\xi')) \leqslant 5\delta \leqslant R$ et ξ appartient à $O(y_2, R)$.

Prenons y_1 le point de γ vérifiant:

$$|x - y_1| = -\log_t \frac{r}{C} + R + 10\delta$$

(d'après (1), $r \leqslant C$, donc $-\log_t(r/C) + R + 10\delta \geqslant 0$) et montrons que $B(\xi, r)$ contient $O(y_1, R)$. Soit ξ' un point de $O(y_1, R)$, γ' un rayon géodésique joignant x à ξ passant par $B(y_1, R)$, P un point appartenant à $\gamma \cap B(y_1, R)$ et Q un point de $(\xi\xi')$ vérifiant:

$$|x - Q| = d(x, (\xi\xi')) .$$

Considérons le quadrilatère $(y_1 P \xi\xi')$, en le subdivisant en deux triangles, on voit qu'il est 10δ-fin, aussi:

$$d(Q, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y_1\xi)) \leqslant 10\delta .$$

D'autre part:

$$d(x, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y_1\xi)) \geqslant |x - y_1| - R .$$

Donc:

$$\begin{aligned} d(x, (\xi\xi')) &= |x - Q| \\ &\geqslant d(x, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y\xi)) - d(Q, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y\xi)) \\ &\geqslant |x - y_1| - R - 10\delta = -\log_t \frac{r}{C} \end{aligned}$$

alors d'après (1), $d(\xi, \xi') \leqslant r$ et ξ' appartient à $B(\xi, r)$.

On a donc trouvé deux ombres centrées en ξ qui vérifient:

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R) .$$

Leurs rayons satisfont:

$$r(y_1) = t^{-R-10\delta} C^{-1} r \quad \text{et} \quad r(y_2) \leqslant t^{5\delta+1} C r .$$

Posons $D = \max\{t^{R+10\delta} C, t^{5\delta+1} C\}$. On obtient:

$$D^{-1} r(y_2) \leqslant r \leqslant D r(y_1) . \qquad \square$$

De manière symétrique, on a aussi:

1.6.3. LEMME. *Pour R suffisamment grand ($R \geqslant 5\delta$ convient), il existe une constante $E = E(R) \geqslant 1$, telle que pour tout $\xi \in \partial X$ et toute ombre $O(y, R)$ centrée en ξ, on puisse trouver des boules $B(\xi, r_1)$ et $B(\xi, r_2)$ de $(\partial X, d)$ vérifiant:*

$$B(\xi, r_1) \subset O(y, R) \subset B(\xi, r_2)$$

avec

$$E^{-1} r_2 \leqslant r(y) \leqslant E r_1 .$$

Preuve de 1.6.3. Elle est semblable à la précédente, donnons-la néanmoins. On reprend les notations de la preuve de 1.6.2.

Soit $r_1 = C^{-1} t^{-5\delta-1} r(y)$, montrons que $B(\xi, r_1)$ est contenue dans $O(y, R)$. Soit ξ' un point de $B(\xi, r_1)$. Le triangle $(x\xi\xi')$ étant 5δ-fin, on a:

$$d(y, [x\xi') \cup (\xi\xi')) \leqslant 5\delta .$$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire, les inégalités (1) et le choix de r_1:

$$\begin{aligned} d(y, (\xi\xi')) &\geqslant d(x, (\xi\xi')) - |x - y| \\ &\geqslant -\log_t d(\xi, \xi') - \log_t C + \log_t r(y) \\ &\geqslant 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc $d(y, [x\xi')) \leqslant 5\delta \leqslant R$ et ξ' appartient à $O(y, R)$.

Soit $r_2 = C t^{R+10\delta} r(y)$. Montrons que $B(\xi, r_2)$ contient $O(y, R)$. Soit ξ' un point de $O(y, R)$; comme dans la preuve de 1.6.2, on a:

$$d(x, (\xi\xi')) \geqslant |x - y| - R - 10\delta .$$

Donc d'après (1) et le choix de r_2:

$$d(\xi, \xi') \leqslant C t^{R+10\delta} r(y) = r_2$$

et ξ' appartient à $B(\xi, r_2)$.

Posons $E = \max\{C t^{5\delta+1}, C t^{R+10\delta}\}$, on obtient

$$E^{-1} r_2 \leqslant r(y) \leqslant E r_1 . \qquad \square$$

D'après la propriété des quasi-rayons géodésiques dans un espace hyperbolique, l'image d'une ombre se compare aisément à une ombre. Ainsi, et en utilisant les lemmes 1.6.2 et 1.6.3, on obtient la généralisation suivante d'un théorème de Margulis.

1.6.4. THÉORÈME. *Soit X et X' deux espaces hyperboliques. Supposons leurs bords équipés de métriques visuelles.*

a) *Toute quasi-isométrie f de X dans X' s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de ∂X dans $\partial X'$.*

b) *Si X et X' sont quasi-isométriques, leurs bords se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme bi-Hölder.*

Preuve de 1.6.4. Il suffit de montrer a). Soit x une origine dans X, prenons pour origine de X' le point $f(x)$. Soit respectivement d et d' des métriques visuelles de paramètre (x, t) et $(f(x), t')$ sur ∂X et $\partial X'$.

Par la propriété des quasi-rayons géodésiques (1.4.1.c)), f s'étend en une application de ∂X dans $\partial X'$, notée ∂f. C'est un plongement bi-Hölder à cause des définitions des métriques visuelles et de la propriété des quasi-géodésiques.

Pour montrer que ∂f est un plongement quasi-conforme, on utilise les ombres:

Soit ξ un point de ∂X, y_2 et y_1 deux points dans cet ordre sur $[x\xi)$, $O(y_1, R)$ et $O(y_2, R)$ les ombres portées depuis x des boules $B(y_1, R)$ et $B(y_2, R)$ de X. Par la propriété des quasi-rayons géodésiques, il existe des constantes $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ qui ne dépendent que de R, des constantes de quasi-isométrie de f et de l'hyperbolicité de X et de X'; avec les propriétés suivantes: Notons y_1' et y_2' les projections de $f(y_1)$ et de $f(y_2)$ sur $[f(x)\partial f(\xi))$. Soit $O(y_1', R_1)$ et $O(y_2', R_2)$ les ombres portées depuis $f(x)$ des boules $B(y_1', R_1)$ et $B(y_2', R_2)$ de X'; elles sont centrées en $\partial f(\xi)$. Alors si R a été choisi suffisamment grand:

$$\begin{aligned} O(y_1', R_1) \cap \partial f(\partial X) &\subset \partial f(O(y_1, R)) \\ \subset \partial f(O(y_2, R)) &\subset O(y_2', R_2) \cap \partial f(\partial X) . \end{aligned}$$

De plus le rapport des rayons des ombres $O(y_1', R_1)$ et $O(y_2', R_2)$ est borné par une fonction du rapport des rayons de $O(y_1, R)$ et de $O(y_2, R)$ qui ne dépend que des constantes de quasi-isométrie de f, de l'hyperbolicité de X et de X', et des paramètres t et t'.

Alors les lemmes 1.6.2 et 1.6.3 montrent que ∂f est quasi-conforme sur son image. De façon analogue, ∂f^{-1} est quasi-conforme de $\partial f(\partial X)$ sur ∂X. Ainsi ∂f est un plongement quasi-conforme. $\square$

1.6.4. *Remarque.* Deux métriques d_1 et d_2 sur un même espace E sont dites quasi-conformes si l'identité de (E, d_1) sur (E, d_2) est un homéomorphisme quasi-conforme. Clairement la composée de deux applications quasi-conformes est quasi-conforme. Aussi, la relation: «d_1 et d_2 sont quasi-conformes», est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de E. La classe d'équivalence d'une métrique d de E est appelée structure quasi-conforme de (E, d). (Voir [Pan] pour une définition plus générale). Le théorème 1.6.4.(b) indique que la structure quasi-conforme d'une métrique visuelle sur ∂X, est un invariant de quasi-isométrie de X.

1.7. Groupes hyperboliques

Soit Γ un groupe de type fini et $S = \{a_i, i = 1, \ldots, s\}$ un système de générateurs de Γ. Supposons S symétrique, c'est-à-dire:

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\};\ a_i \neq e$$

et

$$a_i \in S \Rightarrow a_i^{-1} \in S\,.$$

La métrique des mots relative à S, est définie de la manière suivante:

$$|g - g'|_S = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid g^{-1}g' = a_{i_1} \ldots a_{i_n},\ a_{i_k} \in S\}\,.$$

La distance $|e - g|_S$ sera généralement notée $|g|_S$. Observons que Γ agit à gauche par isométries sur $(\Gamma, |\ |_S)$.

Le graphe de Cayley $\mathscr{G}(\Gamma, S)$ est un 1-complexe simplicial géodésique et propre, dans lequel $(\Gamma, |\ |_S)$ est plongé isométriquement. Ses sommets sont les éléments de Γ, deux sommets g, g' sont reliés par une arête si $g^{-1}g' \in S$, c'est-à-dire si $|g - g'|_S = 1$. Il est muni de la métrique simpliciale, c'est-à-dire de la métrique de longueur qui donne à chaque arête une longueur un.

1.7.1. Définition. Le groupe Γ est hyperbolique si l'espace métrique géodésique propre $\mathscr{G}(\Gamma, S)$ est hyperbolique.

D'après l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie, cette définition est indépendante du système de générateurs S. En effet, si S' en est un autre, $(\Gamma, |\ |_S)$ et $(\Gamma, |\ |_{S'})$, et par suite $\mathscr{G}(\Gamma, S)$ et $\mathscr{G}(\Gamma, S')$ sont quasi-isométriques.

1.7.2. Exemples et propriétés. Sont hyperboliques:

a) Les groupes finis.

b) Les groupes libres de type fini.

c) Les groupes à petite simplification $C'(1/6)$. (Voir [G-H], Appendice.)

Un groupe hyperbolique jouit des propriétés suivantes:

a) Il est de présentation finie, et «presque tout» groupe de présentation finie est hyperbolique (voir [Ch], théorème 1.3.2).

b) Il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion (voir [Ch], p. 20).

c) Il ne contient aucun sous-groupe abélien de rang supérieur ou égal à 2.

d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de $\mathbf{Z}$, ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire, il est à croissance exponentielle ([G-H], chapitre 8, théorème 37).

e) Il est automatique (voir [C-D-P], [C-E-H-P-T]).

1.8. Groupes quasi-convexes

1.8.1. Définition. Soit X un espace métrique géodésique propre, et x un élément de X. Un sous-groupe d'isométries de X est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de x est un quasi-convexe de X.

On vérifie que la définition est indépendante du point x choisi. Notons qu'un sous-groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe. La propreté de X permet de montrer:

1.8.2. Proposition. *Un groupe quasi-convexe Γ d'isométries de X, est de type fini. De plus, si S est un système symétrique de générateurs de Γ, l'application:*

$$\begin{aligned}(\Gamma, |\ |_S) &\to X\\ g &\mapsto gx\end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

Pour montrer cette proposition, il suffit d'exhiber un système de générateurs S adéquat. Si l'orbite de x est C-quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble:

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leqslant 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant X hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie:

1.8.3. Corollaire. *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes:

1.8.4. Corollaire. *Soit Γ un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique X. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) *Γ est quasi-convexe.*

b) Γ *est de type fini, et quels que soient le système symétrique de générateurs* S *de* Γ, *et l'élément* x *de* X, *l'application*

$$(\Gamma, |\,|_S) \to X$$
$$g \mapsto gx$$

est une quasi-isométrie.

Rappelons que l'ensemble limite Λ d'un sous-groupe d'isométries Γ de X est défini de la manière suivante:

Soit $x \in X$, considérons $\overline{\Gamma\{x\}}$ l'adhérence de l'orbite de x dans le compact $X \cup \partial X$. Alors:

$$\Lambda = \overline{\Gamma\{x\}} \cap \partial X .$$

Il est compact et indépendant du point x choisi.

Si maintenant Γ est quasi-convexe, alors d'après le théorème 1.6.4, la quasi-isométrie:

$$\Gamma \to X$$
$$g \mapsto gx$$

s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de $\partial\Gamma$ dans ∂X. Clairement il est indépendant du point x choisi, et son image est Λ. Dès lors:

1.8.5. COROLLAIRE. *Le bord d'un groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, et son ensemble limite, se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme, bi-Hölder, canonique.*

Nous donnons une dernière caractérisation des groupes quasi-convexes d'isométries d'un espace hyperbolique X. Celle-ci permet de faire le lien avec les groupes convexes cocompacts de Thurston. Soit E un sous-ensemble de ∂X. Son enveloppe de Gromov, notée $Q(E)$, est l'ensemble des (images des) géodésiques dont les deux extrémités appartiennent à E. C'est un quasi-convexe de X. Si Γ est un sous-groupe d'isométries de X, l'enveloppe de Gromov de son ensemble limite est Γ-invariante; et on a (voir [C]):

1.8.6. PROPOSITION. Γ *est quasi-convexe si et seulement si il est proprement discontinu et si* $Q(\Lambda)/\Gamma$ *est compact.*

1.8.7. EXEMPLES. Soit Γ un sous-groupe d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. Rappelons que Γ est convexe cocompact, s'il est proprement discontinu, et s'il

agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe $H(\Lambda)$ de son ensemble limite. Il est quasi-convexe si et seulement si il est convexe cocompact. En effet, $Q(\Lambda)$ et $H(\Lambda)$ sont à distance de Hausdorff finie. Une manière de le montrer est la suivante (voir [C]): Le convexe $H(\Lambda)$ est la réunion des n-simplexes idéaux de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, dont les arêtes sont des géodésiques de $Q(\Lambda)$ (c'est un théorème de Carathéodory appliqué au modèle de Klein de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ (voir [Ber], théorème 11.1.8.6)). Or tout point d'un n-simplexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est à distance majorée par une constante universelle $C(n)$, de ses arêtes.

Signalons aussi que Γ est convexe cocompact si et seulement si il est géométriquement fini sans parabolique (une conséquence de la décomposition de Margulis en parties fines et épaisses).

Enfin, tout groupe fuchsien de type fini est géométriquement fini (voir [Bea], chapitre 10). Aussi, un groupe fuchsien est quasi-convexe si et seulement si il est de type fini sans parabolique.

2. Structure conforme sur le bord d'un CAT(-1)-espace Ensemble limite et flot géodésique associés à une action quasi-convexe

2.0. Introduction

Soit X un CAT(-1)-espace. Nous montrons que son bord admet une structure conforme canonique, compatible avec sa structure quasi-conforme. Plus précisément, nous construisons sur ∂X une famille de métriques visuelles $\{d_x, x \in X\}$, deux à deux conformes, qui ont la propriété que les isométries de X soient des applications conformes de $(\partial X, d_x)$.

Rappelons qu'une application $f: (A, d_A) \to (B, d_B)$ est conforme, si quel que soit $a_0 \in A$, la limite lorsque a tend vers a_0 de

$$\frac{d_B(f(a), f(a_0))}{d_A(a, a_0)}$$

existe et est finie non nulle. On l'appellera le facteur conforme de f en a_0. Rappelons également que deux métriques d_1, d_2 sur A, sont conformes, si l'identité $(A, d_1) \to (A, d_2)$ est conforme.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique Γ sur un CAT(-1)-espace X. A cette action sont associés:

— L'ensemble limite de Γ dans ∂X, muni de la structure conforme induite, sur lequel agit Γ par transformations conformes.

— Un flot géodésique qui généralise le flot géodésique habituel du fibré unitaire tangent à une variété riemannienne compacte (voir [G] et 2.8).

Nous montrons que la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement. Précisons ceci:

Supposons que Γ agisse par isométries de manière quasi convexe, sur deux CAT(-1)-espaces X_1 et X_2. Notons respectivement $\Lambda_1, \Lambda_2, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$, les ensembles limites et les espaces du flot géodésique associés aux deux actions de Γ. D'après 1.8.5, Λ_1 et Λ_2 se correspondent par un homéomorphisme canonique. Γ-équivariant et quasi conforme:

$$\Omega : \Lambda_1 \to \Lambda_2 .$$

D'autre part, l'ensemble:

$$\Lambda_i \times \Lambda_i - \{\text{diagonale}\}/\Gamma, \ i = 1, 2$$

s'identifie à $\mathscr{O}_i$, l'ensemble des orbites (orientées) du flot de $\mathscr{E}_i$. Donc l'homéomorphisme Γ-équivariant:

$$\Omega \times \Omega : \ \Lambda_1 \times \Lambda_1 - \{\text{diagonale}\} \to \Lambda_2 \times \Lambda_2 - \{\text{diagonale}\}$$

donne par passage au quotient une bijection:

$$F : \mathscr{O}_1 \to \mathscr{O}_2 .$$

M. Gromov montre l'existence d'une équivalence d'orbite de $\mathscr{E}_1$ sur $\mathscr{E}_2$ qui induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. (Une équivalence d'orbite est un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons:

2.0.1. THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'homéomorphisme quasi-conforme* Ω *est conforme.*

(ii) *L'équivalence d'orbite précédente est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbite préservant le paramétrage).*

Sans doute ce théorème est-il déjà connu des spécialistes (U. Hamenstädt fait des choses assez semblables dans [H]). Il ne semble pourtant pas avoir été écrit sous cette forme, ni dans cette généralité.

Aux paragraphes 2.1, 2.2, 2.3, nous rappelons brièvement les définitions des fonctions de Busemann, de distances horosphériques et d'horosphères. Les paragraphes 2.4, 2.5, 2.6 sont consacrés à la construction de la structure conforme de ∂X. Les paragraphes 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 traitent de l'ensemble

limite et du flot géodésique associés à une action isométrique, quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique sur X. On développe brièvement la notion de mesure conforme sur l'ensemble limite, et on rappelle une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Au paragraphe 2.11, nous montrons le théorème 2.0.1.

2.1. Fonctions de Busemann

Soit $r: [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique, et $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire, la fonction

$$t \mapsto |x - r(t)| - t$$

est décroissante et minorée par $-|x - r(0)|$. Appelons $b_r(x)$ sa limite en $+\infty$. L'application b_r de X dans $\mathbf{R}$ ainsi définie, est la fonction de Busemann associée au rayon r.

2.2. Distances horosphériques

Soit $x, y \in X$, $\xi \in \partial X$, et $r: [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. La quantité

$$\lim_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$$

est égale à $b_r(x) - b_r(y)$. Elle est indépendante du rayon r d'extrémité ξ. En effet si r' est un autre rayon d'extrémité ξ, par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} d(r'(t), r) = 0 . \tag{2.2.0}$$

La limite $B_\xi(x, y) = \lim_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$ est appelée distance horosphérique de x à y relativement à ξ. Elle vérifie:

$$B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x) \tag{2.2.1}$$

$$B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z) \tag{2.2.2}$$

$$B_\xi(x, y) \leqslant |x - y| \tag{2.2.3}$$

avec égalité si et seulement si $y \in [x\xi)$.

2.3. Horosphères

Considérons les ensembles de niveau de la fonction:

$$f_x: z \mapsto B_\xi(x, z) .$$

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de x. Plus précisément, l'ensemble de niveau t de f_x est égal à l'ensemble de niveau $t - B_\xi(x, y)$ de f_y. Ce sont les horosphères en ξ.

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante: Soient $H_{x,\xi}$ et $H_{y,\xi}$ les horosphères en ξ, passant par x et y. On a d'après 2.2.3:

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y,\xi}) = d(H_{x,\xi}, H_{y,\xi}) .$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique: Soit $\xi \in \partial X$. Pour $x \in X$, notons $r_x : [0, +\infty[\to X$ le rayon géodésique issu de x et d'extrémité ξ. Alors:

$$H_{x,\xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \to +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\} . \tag{2.3.1}$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

2.4. Produit de Gromov de deux éléments de ∂X

Soit x, y, z trois points de X. Rappelons que le produit de Gromov de y, z relativement à x, est défini par (voir figure 0):

$$(y \mid z)_x = \tfrac{1}{2}(|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

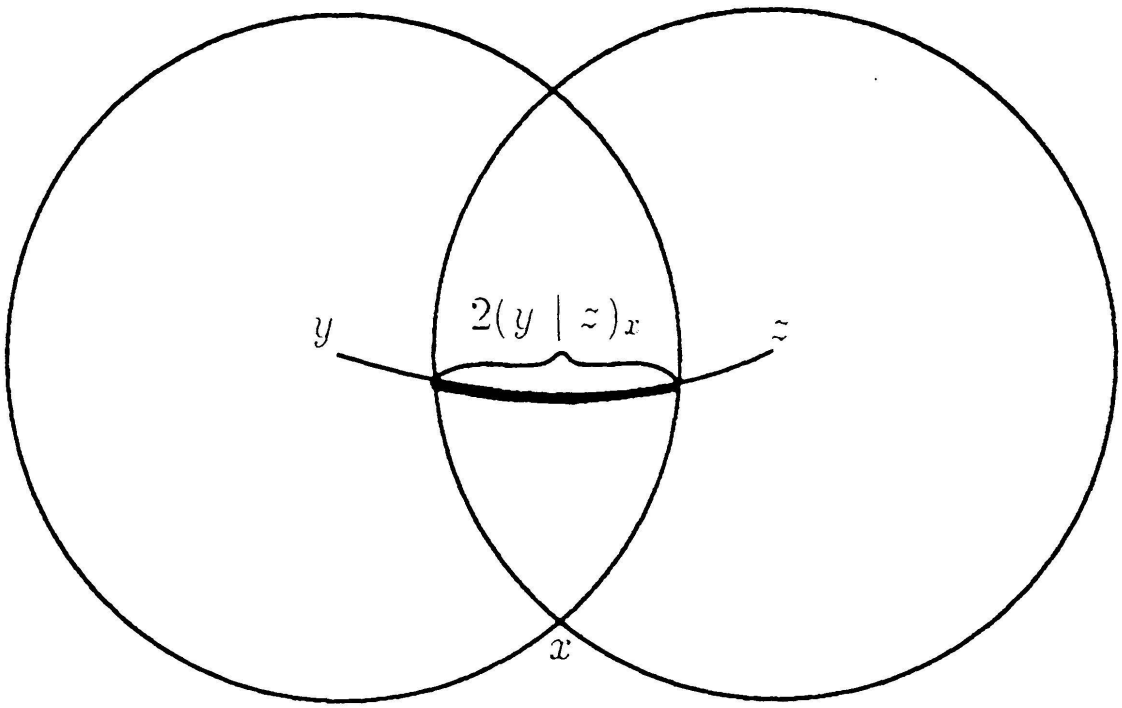

Figure 0

Soit maintenant ξ, ξ' deux points distincts de ∂X, x un point de X, et p appartenant à $(\xi\xi')$. Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression:

$$\tfrac{1}{2}(B_\xi(x,p) + B_{\xi'}(x,p)) .$$

Elle est indépendante du point p choisi sur $(\xi\xi')$. On l'appellera produit de Gromov de ξ et ξ' relativement à x, et on la notera $(\xi \mid \xi')_x$. (Voir figure 1.)

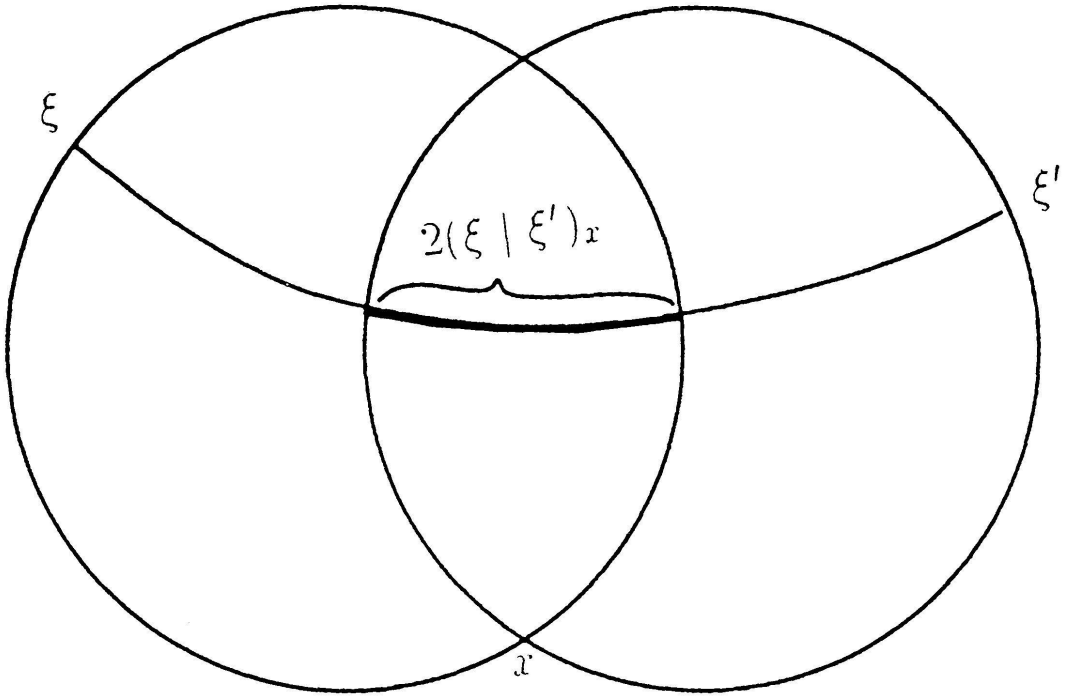

FIGURE 1

Notons que

$$(\xi \mid \xi')_x = (\xi' \mid \xi)_x \tag{2.4.1}$$

$$(\xi \mid \xi')_y = (\xi \mid \xi')_x - \tfrac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y)) . \tag{2.4.2}$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante:

2.4.3. PROPOSITION. *Soit* $y \in [x\xi)$ *et* $y' \in [x\xi')$. *Le produit de Gromov* $(y \mid y')_x$ *converge vers* $(\xi \mid \xi')_x$, *lorsque* y *et* y' *tendent respectivement vers* ξ *et* ξ'.

2.5. UNE FAMILLE DE MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

Soit x une origine dans X. Pour $\xi, \xi' \in \partial X$, définissons:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi \mid \xi')_x} \quad \text{si} \quad \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \text{ sinon} .$$

2.5.1. THÉORÈME. *d_x est une métrique sur ∂X.*

2.5.2. *Remarque.* d_x est une métrique visuelle de paramètres (x, e) (voir 1.5.1). En effet, l'expression

$$|(\xi \mid \xi')_x - d(x, (\xi\xi'))|$$

est majorée par une constante universelle (voir [G-H], chapitre 2, lemme 17).

Afin de montrer le théorème, nous introduisons un angle de comparaison, ou plutôt son sinus: Soit y, y' deux éléments de $X - \{x\}$. Soit $(\bar{x}\bar{y}\bar{y}')$ un triangle de comparaison de (xyy') dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$. Posons:

$$\alpha_x(y, y') = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{y}'}}{2} . \tag{2.5.3}$$

On peut également exprimer $\alpha_x(y, y')$ sans recourir à un triangle de comparaison. En effet, d'après les formules de trigonométrie dans $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on a:

$$\alpha_x(y, y') = \left(\frac{\operatorname{ch}|y - y'| - \operatorname{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \operatorname{sh}|x - y| \operatorname{sh}|x - y'|}\right)^{1/2} .$$

Le théorème découlera des deux lemmes suivants:

2.5.4. LEMME. *Soit $S(x, r)$ la sphère de X, de centre x et de rayon r. Sur $S(x, r)$, $r > 0$, α_x est une métrique.*

2.5.5. *Preuve de 2.5.4.* Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Soient donc y, z, t appartenant à $S(x, r)$. D'après la relation 2.5.3, les valeurs de α appartiennent à $[0, 1]$. Aussi, pour montrer l'inégalité triangulaire:

$$\alpha_x(y, t) \leqslant \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) ,$$

supposons:

$$\alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) < 1 . \tag{1}$$

Soit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, tels que:

a) $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ et $(\bar{x}\bar{z}\bar{t})$ soient des triangles de comparaison de (xyz) et de (xzt).

b) $(\bar{x}\bar{z})$ sépare $\bar{y}$ et $\bar{t}$ (voir figure 2).

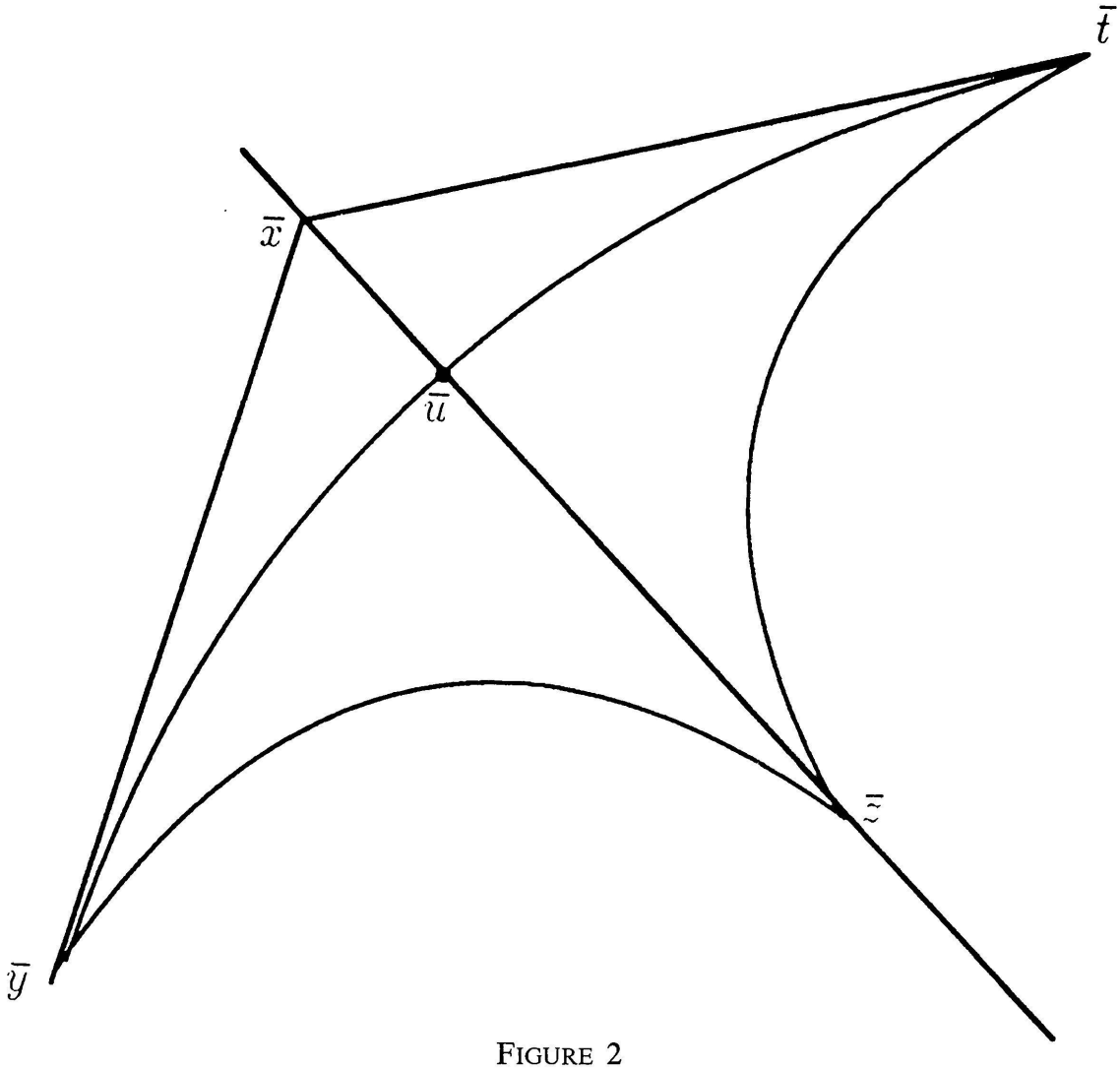

FIGURE 2

D'après 2.5.3, on a:

$$\alpha_x(y, z) = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\,\bar{x}\,\bar{z}}}{2}, \quad \alpha_x(z, t) = \sin \frac{\widehat{\bar{z}\,\bar{x}\,\bar{t}}}{2}. \tag{2}$$

L'hypothèse (1) implique:

$$\widehat{\bar{y}\,\bar{x}\,\bar{z}} + \widehat{\bar{z}\,\bar{x}\,\bar{t}} < \pi,$$

de plus:

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{x} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{t}|,$$

et $(\bar{x}\bar{z})$ sépare $\bar{y}$ et $\bar{t}$. Donc le segment $[\bar{y}\bar{t}]$ coupe $[\bar{x}\bar{z}]$ en un unique point $\bar{u}$. Soit $u \in [xz]$, le point correspondant à $\bar{u}$. L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent alors:

$$\begin{aligned} |y - t| &\leqslant |y - u| + |u - t| \\ &\leqslant |\bar{y} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{t}| \\ &= |\bar{y} - \bar{t}|. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_x(y,t) = \left(\frac{\operatorname{ch}|y-t| - \operatorname{ch}(|x-y|-|x-t|)}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}(|x-t|}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\frac{\operatorname{ch}|\bar{y}-\bar{t}| - \operatorname{ch}(|\bar{x}-\bar{y}|-|\bar{x}-\bar{t}|)}{2\operatorname{sh}|\bar{x}-\bar{y}|\operatorname{sh}(|\bar{x}-\bar{t}|}\right)^{1/2}.$$

c'est-à-dire encore:

$$\alpha(y,t) \leqslant \sin\frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{t}}}{2}. \tag{3}$$

Or $\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{t}} = \widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}} + \widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{t}}$, et $\sin(a+b) \leqslant \sin a + \sin b$, pour a, b appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc (2) et (3) donnent:

$$\alpha_x(y,t) \leqslant \alpha_x(y,z) + \alpha_x(z,t). \qquad \square$$

2.5.6. LEMME. *Soient* $y \in [x\xi)$, $y' \in [x\xi')$, *alors:*

$$\lim_{\substack{y\to\xi\\ y'\to\xi'}} \alpha_x(y,y') = d_x(\xi,\xi').$$

2.5.7. *Preuve de 2.5.6.* On a:

$$\alpha_x(y,y') = \left(\frac{\operatorname{ch}|y-y'|}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|} - \frac{\operatorname{ch}(|x-y|-|x-y'|)}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|}\right)^{1/2}.$$

Un calcul montre que:

$$\frac{\operatorname{ch}(|x-y|-|x-y'|)}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|} = \tfrac{1}{2}(\coth|x-y|\coth|x-y'|-1).$$

Cette expression tend vers 0 lorsque $y \to \xi, y' \to \xi'$. Par ailleurs:

$$\frac{\operatorname{ch}|y-y'|}{2\operatorname{sh}|x-y|\operatorname{sh}|x-y'|} \sim e^{|y-y'|-|x-y|-|x-y'|} = e^{-2(y|y')_x},$$

or d'après la proposition 2.4.3, on a:

$$\lim_{\substack{y\to\xi\\ y'\to\xi'}} (y|y')_x = (\xi|\xi')_x.$$

D'où le lemme. $\square$

2.5.8. *Preuve du théorème 2.5.1.* Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Elle résulte des lemmes 2.5.4 et 2.5.6. □

2.5.9. EXEMPLES.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. Soit x le centre du modèle en boule. Alors:

$$d_x(\xi, \xi') = \sin \frac{\widehat{\xi x \xi'}}{2}$$

est la moitié de la longueur du segment euclidien reliant ξ à ξ' (voir figure 3).

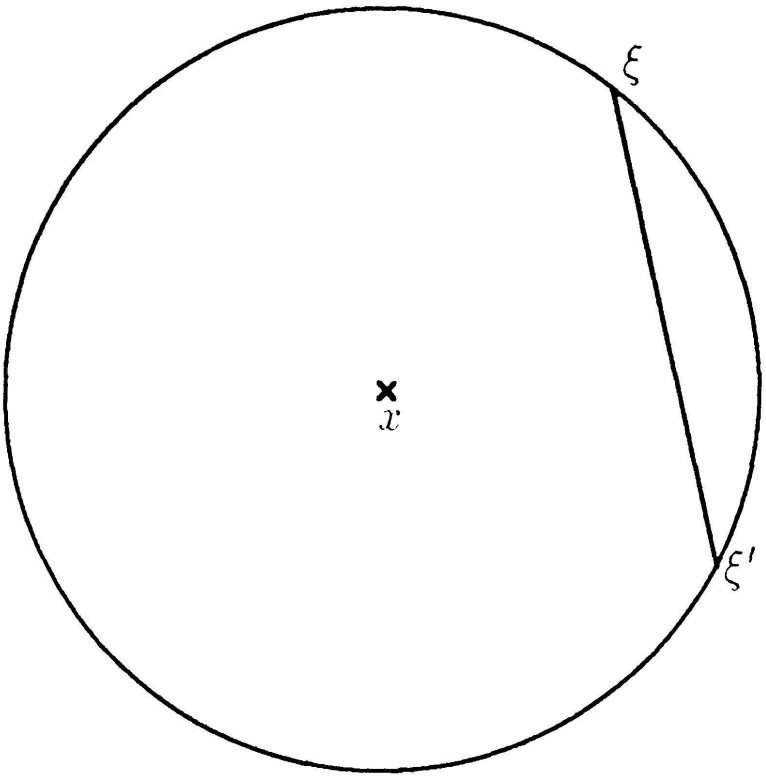

FIGURE 3

Ce n'est pas la métrique naturelle sur ∂X, qui est la métrique angulaire. Néanmoins elle lui est conforme, de facteur conforme constant égal à $\frac{1}{2}$.

b) Si X est un arbre réel:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi \mid \xi')_x},$$

où $(\xi \mid \xi')_x$ est la longueur du trajet que font ensemble les deux rayons géodésiques issus de x et allant vers ξ et ξ' (voir figure 4).

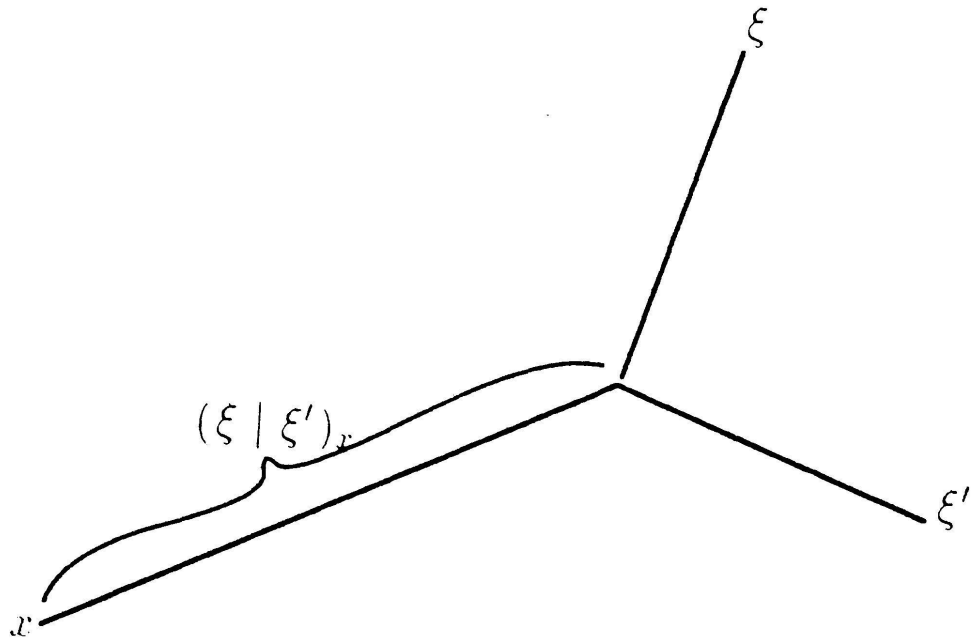

FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR ∂X

Nous montrons maintenant que la famille de métriques $\{d_x, x \in X\}$, définit une structure conforme sur ∂X. On a:

2.6.1. PROPOSITION. *Soit x une origine dans X et y, z deux éléments de X. La fonction sur $(\partial X, d_x)$, définie par:*

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. *Preuve.* D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a:

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z) .$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur $(\partial X, d_x)$. D'après la définition des métriques d_x et d'après la relation 2.4.2, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))}$$

ou encore

$$B_\xi(x, y) = 2\log d_y(\xi, \xi') - 2\log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y) . \tag{1}$$

Supposons que ∂X ne soit pas réduit à un point. Soit alors V un petit voisinage compact de ξ, et ξ' un élément fixé en dehors de V. La fonction:

$$\xi \mapsto 2 \log d_x(\xi, \xi')$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Les métriques d_x et d_y étant des métriques visuelles de paramètres respectifs (x, e) et (y, e), elles sont Lipschitz-équivalentes (voir 1.5.3.b). Donc la fonction

$$\xi \mapsto 2 \log d_y(\xi, \xi')$$

est également lipschitzienne sur (V, d_x). Dès lors, par la relation (1), la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Maintenant la compacité de $(\partial X, d_x)$ montre qu'elle est lipschitzienne sur ∂X. $\square$

2.6.3. COROLLAIRE.

a) *Quels que soient les éléments x et y de X, les métriques d_x et d_y sont conformes.*

b) *Soit g une isométrie de X. Alors g est une application conforme de $(\partial X, d_x)$, dont le facteur conforme en ξ est:*

$$|g'(\xi)|_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

2.6.4. *Preuve:*

a) D'après la relation 2.4.2 et la définition des métriques d_x, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))} .$$

Donc la proposition 2.6.1 donne:

$$\frac{d_y(\xi, \xi')}{d_x(\xi, \xi')} \underset{\xi' \to \xi}{\to} e^{B_\xi(x,y)}$$

ce qui montre que d_x et d_y sont conformes.

b) Puisque g est une isométrie de X, on a:

$$(g\xi \mid g\xi')_x = (\xi \mid \xi')_{g^{-1}x} .$$

Donc:

$$d_x(g\xi, g\xi') = d_{g^{-1}x}(\xi, \xi')$$

et la fin de la preuve est identique au (a). $\square$

2.6.5. EXEMPLES.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ et x le centre du modèle en boule. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$ agit par transformations conformes sur la sphère S^n munie de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme en ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$. D'après l'exemple 2.5.9(a) on a:

$$\| g'(\xi) \| = | g'(\xi) |_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

b) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ et normalisons la métrique afin que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Soit x le centre du modèle en boule.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ laisse invariant le champ d'hyperplans $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$, défini par:

$$P_\xi = \{u \in T_\xi S^{2n-1};\ h(\xi, u) = 0\}$$

où h est la forme hermitienne de $\mathbf{C}^n$:

$$h(\xi, u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{u}_i .$$

Il agit par transformations conformes sur $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$ muni de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme sur P_ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$. Nous allons voir qu'à nouveau:

$$\| g'(\xi) \| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} = | g'(\xi) |_x .$$

Pour ce faire, ramenons-nous à l'exemple a) par un argument de D. Sullivan ([Su], p. 176). Observons tout d'abord que $\| g'(\xi) \|$ ne dépend que de $g^{-1}x$. En effet, si $h \in \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, alors la composée $g \circ h^{-1}$ fixe x le centre du modèle en boule, donc $g \circ h^{-1}$ appartient à $U(n)$ et:

$$\| g'(\xi) \| = \| h'(\xi) \| .$$

Choisissons donc judicieusement h. Notons y l'intersection de l'horosphère H_ξ, basée en ξ, contenant $g^{-1}x$, avec la géodésique $(x\xi)$. Le stabilisateur de H_ξ dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ agit transitivement sur H_ξ, de plus le facteur conforme de ses éléments en P_ξ est 1. Soit p un élément de $\mathrm{Stab}(H_\xi)$, vérifiant

$$p(g^{-1}x) = y .$$

Soit aussi une copie de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ contenant la géodésique $(x\xi)$. L'espace tangent à son bord en ξ est contenu dans P_ξ. Soit t un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ qui fixe cette copie et envoie y sur x.

D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une* τ*-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une* τ*-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus:

2.7.5. THÉORÈME.

a) *La dimension* τ *est égale au taux de croissance de* Γ *dans* X. *C'est-à-dire:*

$$\tau = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\} .$$

b) *La* ν_x*-mesure d'une boule de* (Λ, d_x), *est proportionnelle à son rayon à la puissance* τ. *Autrement dit: il existe une constante* $C_x \geqslant 1$, *telle que pour toute boule* $B(\xi, r)$ *centrée sur* Λ, *on ait:*

$$C_x^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B(\xi, r)) \leqslant C_x r^\tau .$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats: Soit $\alpha_0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\}$. S.J. Patterson a exhibé une mesure α_0-conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α-mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ, les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ-mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ-mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X. Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X, dont les extrémités appartiennent à Λ:

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbf{R} \to X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\} .$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt .$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.

En effet, on a:

2.8.1. PROPOSITION. *Quel que soit* $T \geqslant 0$, *alors:*

$$e^{-T} \sup_{t \in [-T,T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \leqslant |\gamma - \gamma'|_{GA}$$
$$\leqslant \sup_{t \in [-T,T)} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T} .$$

2.8.2. *Preuve.* L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3):

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X . \qquad \square$$

Clairement, le groupe Γ agit par isométries sur $(G\Lambda, |\ |_{G\Lambda})$ de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient:

$$\mathscr{E} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire (X, Γ). Notons que $\mathscr{E}$ est compact. En effet, Γ est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de Λ par Γ est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de $G\Lambda$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$, provenant de l'action naturelle de $\mathbf{R}$ sur $G\Lambda$. Il est défini par:

$$\Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \quad \text{avec} \quad \gamma_T(t) = \gamma(t + T) . \tag{2.8.3}$$

Remarquons que pour tout $T \in \mathbf{R}$, $g \in \Gamma$, et $\gamma \in G\Lambda$:

$$\Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma) . \tag{2.8.4}$$

Le flot géodésique de $\mathscr{E}$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur $\mathscr{E}$ par la relation 2.8.4. On le notera encore $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$.

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de $(G\Lambda, \Phi_T)$. En $\gamma \in G\Lambda$, ils sont respectivement définis par:

$$W^{ss}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \mid |\Phi_T(\eta) - \Phi_T(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\}$$

$$W^{uu}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \mid |\Phi_{-T}(\eta) - \Phi_{-T}(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\} .$$

Ils forment un feuilletage Φ_T-invariant de $G\Lambda$. D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante:

$$(2.8.5)\quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à Λ privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de $(\mathscr{E}, \Phi_T)$ par:

2.8.6. DÉFINITION. *Soit π la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$, alors:*

$$W^{ss}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{ss}(\gamma))$$
$$W^{uu}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{uu}(\gamma))\,.$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de $G\Lambda$ en γ, est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de γ sous Φ_T. En d'autres termes:

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\}$$
$$W^u(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,.$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de $\mathscr{E}$. D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de $G\Lambda$, via la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$.

2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE $(\mathscr{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine x dans X. Soit Δ la diagonale de $\Lambda \times \Lambda$. On définit une application de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ dans $G\Lambda$, de la manière suivante: à

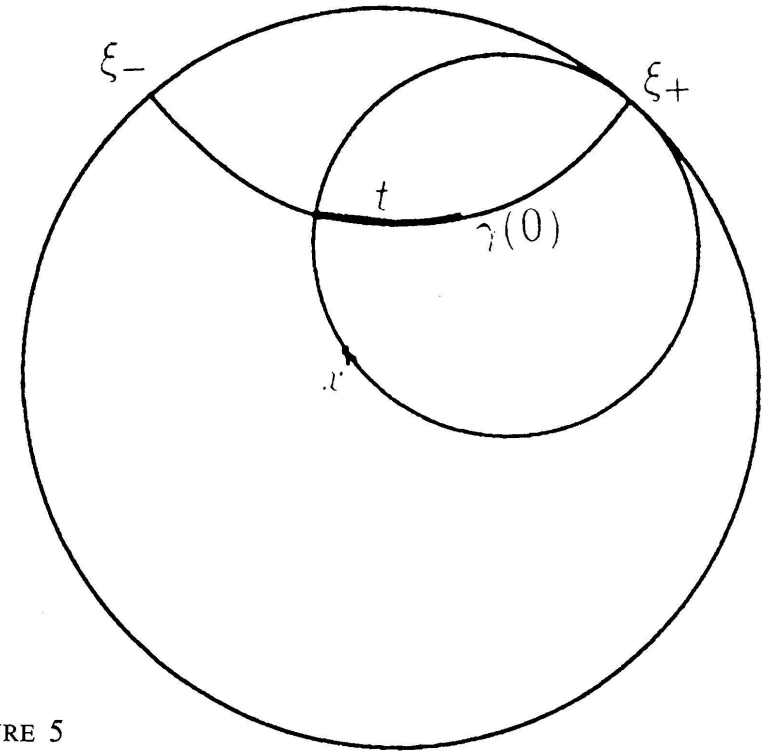

FIGURE 5

l'élément (ξ_-, ξ_+, t) de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$, associons l'unique élément γ de $G\Lambda$ vérifiant (voir figure 5):

$$\gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t . \tag{2.9.1}$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées Φ_T s'écrit:

$$\Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T) . \tag{2.9.2}$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5):

$$\{(\xi_-, \xi_+, t),\ \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\} . \tag{2.9.3}$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de Γ s'écrit:

$$g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)) . \tag{2.9.4}$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme:

$$(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}/_\sim \to \mathscr{E} \tag{2.9.5}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$:

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe $g \in \Gamma$ tel que:

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x) .$$

2.10. Mesure d'entropie maximale

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan ([Su], [Su2]), dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit x un élément de X, et soit respectivement τ et ν_x la dimension et la mesure de Hausdorff de (Λ, d_x) (voir 2.7). La mesure:

$$\mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}} \tag{2.10.1}$$

est une mesure de Radon sur $\Lambda \times \Lambda - \Delta$. Elle est indépendante de x et Γ-invariante. En effet $\{\nu_x, \nu \in X\}$ est une mesure τ-conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi')\ [p(x, y, \xi)\, p(x, y, \xi')]^{1/2} .$$

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier $G\Lambda$ à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$. Soit alors $\tilde{m}$ la mesure sur $G\Lambda$ définie par:

$$\tilde{m} = \mu \times dt .$$

C'est une mesure de Radon. Γ-invariante et Φ_T-invariante. La mesure m, restriction de $\tilde{m}$ au compact $\mathscr{E}$, (considéré comme un domaine fondamental de Γ dans $G\Lambda$), est finie et Φ_T-invariante. On a:

2.10.2. THÉORÈME. *Φ_T est ergodique sur $(\mathscr{E}, m)$.*

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que μ s'écrive comme un produit de deux mesures sur Λ.

Clairement, l'ergodicité de Φ_T sur $(\mathscr{E}, m)$ est équivalente à celle de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$. Puisque μ et $\nu_x \times \nu_x$ sont absolument continues, l'ergodicité de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ entraîne l'ergodicité de Γ sur (Λ, ν_x). D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. *L'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ et sur (Λ, ν_x).*

Notons respectivement h et h_m, l'entropie topologique de Φ_T et l'entropie mesurable de (Φ_T, m). Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient:

2.10.4. THÉORÈME. *$h = h_m = \tau$. Ainsi m maximise l'entropie mesurable.*

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes:

Soient x_1, x_2 des origines respectivement de X_1 et X_2. Notons d_1 et d_2 les métriques d_{x_1} et d_{x_2} sur Λ_1 et Λ_2.

2.11.1. LEMME. *Supposons que l'application $\Omega : (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ soit conforme. Alors, son facteur conforme ω est continu sur Λ_1.*

2.11.2. *Preuve de 2.11.1.* Puisque Ω est conforme, les ensembles limites Λ_1 et Λ_2 ont même dimension de Hausdorff τ. De plus, en notant ν_1 et ν_2 les τ-mesures de Hausdorff de (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2), on a:

$$\Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 . \tag{1}$$

Soit μ_1 et μ_2 les mesures sur $\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta$ et $\Lambda_2 \times \Lambda_2 - \Delta$, définies par la relation 2.10.1. D'après l'égalité (1), la mesure:

$$(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$$

est absolument continue par rapport à μ_1. De plus, μ_2 est Γ-invariante et Ω est Γ-équivariant, donc $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ est Γ-invariante. Alors, puisque l'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta, \mu_1)$ (corollaire 2.10.3), les mesures $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ et μ_1 sont égales à une constante près. Donc, à une constante près leurs densités par rapport à $\nu_1 \times \nu_1$ sont presque sûrement égales. D'où $\nu_1 \times \nu_1$-presque sûrement:

$$\frac{\omega^\tau(\xi)\omega^\tau(\xi')}{[d_1(\xi, \xi')]^{2\tau}} = \frac{\text{Cste}}{[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^{2\tau}},$$

soit encore

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = (\text{Cste})^{1/\tau} \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

L'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ étant continue, ω l'est également. Notons qu'en faisant tendre ξ' vers ξ, on trouve Cste $= 1$. $\square$

Soit maintenant s_i l'involution de $G\Lambda_i$ définie par:

$$s_i(\gamma) = \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = \gamma(-t) .$$

Par passage au quotient on obtient une involution de $\mathscr{E}_i$ que l'on notera encore s_i.

2.11.3. LEMME. *Supposons que l'homéomorphisme* $G: \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ *conjugue les flots géodésiques. Quitte à remplacer* G *par* $G' = \Phi_{T_0} \circ G$ *pour un certain réel* T_0, *on peut supposer:*

$$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

2.11.4. *Preuve de 2.11.3.* Soit T la fonction sur $\mathscr{E}_1$ dans $\mathbf{R}$, définie de la manière suivante: Etant donné $\gamma \in \mathscr{E}_1$, $T(\gamma)$ est l'unique réel vérifiant:

$$\Phi_{T(\gamma)}(G \circ s_1(\gamma)) = s_2 \circ \Phi_{T(\gamma)}(G(\gamma)) . \tag{1}$$

La fonction T est continue et invariante par le flot de $\mathscr{E}_1$. Aussi elle est constante (par l'ergodicité du flot sur $(\mathscr{E}_1, m_1)$; (théorème 2.10.2)). Notons T_0 la valeur constante de T, et G' l'application $\Phi_{T_0} \circ G$. D'après (1), on a:

$$G' \circ s_1 = s_2 \circ G' . \quad \square$$

2.11.5. *Preuve de 2.0.1.* Montrons (i) ⇒ (ii).

Soit $g \in \Gamma$. Notons respectivement $|g'|_1$ et $|g'|_2$, le facteur conforme de g sur (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2). En écrivant:

$$\Omega \circ g = g \circ \Omega .$$

et en calculant le facteur conforme des deux membres, on obtient:

$$(\omega \circ g)\,|g'|_1 = (|g'|_2 \circ \Omega)\omega . \tag{1}$$

Construisons maintenant notre conjugaison: Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant pour origines les points x_1 et x_2. Définissons une application $\tilde{G}$ de $G\Lambda_1$ dans $G\Lambda_2$, par:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+)) .$$

D'après le lemme 2.11.1, ω est continue, donc $\tilde{G}$ est un homéomorphisme. D'après la relation 2.9.2, il conjugue les flots de $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$. De plus, quel que soit $g \in \Gamma$, il vérifie:

$$\tilde{G} \circ g = g \circ \tilde{G} . \tag{2}$$

En effet, d'après 2.9.4 on a:

$$\begin{aligned}&(\tilde{G} \circ g)\,(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (\Omega \circ g(\xi_-), \Omega \circ g(\xi_+), t - B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) - \log\omega \circ g(\xi_+))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(g \circ \tilde{G})\,(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (g \circ \Omega(\xi_-), g \circ \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+) - B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2)) .\end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.6.3,

$$B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) = \log|g'(\xi_+)|_1$$

et

$$B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2) = \log(|g'|_2 \circ \Omega(\xi_+)) .$$

Ainsi l'égalité (2) provient de (1) et de la Γ-équivariance de Ω. Grâce à (2), on obtient une conjugaison des flots de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Par construction, elle induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$.

Montrons (ii) ⇒ (i).

Soit $G\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ une conjugaison des flots, qui induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. D'après le lemme 2.11.3, on peut supposer:

(3) $$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

Relevons la conjugaison G à $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ de la manière suivante: Soit π_i la projection de $G\Lambda_i$ sur $\mathscr{E}_i$. Pour $\gamma: \mathbf{R} \to X_1$ appartenant à $G\Lambda_1$, soit $\gamma': \mathbf{R} \to X_2$, un élément de $G\Lambda_2$ vérifiant:

$$\gamma'(-\infty) = \Omega(\gamma(-\infty)), \quad \gamma'(+\infty) = \Omega(\gamma(+\infty))$$

et

$$\pi_2(\gamma') = G(\pi_1(\gamma)) .$$

Notons que γ' existe puisque G induit F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. De plus, si $\pi_1(\gamma)$ n'appartient à aucune orbite périodique de $\mathscr{E}_1$, γ' est unique. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} \tilde{G}: G\Lambda_1 &\to G\Lambda_2 \\ \gamma &\mapsto \gamma' \end{aligned}$$

définie sauf sur les relevés des orbites périodiques, qui conjugue les flots, vérifie:

$$G \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{G} .$$

ainsi que, d'après (3):

(4) $$\tilde{G} \circ s_1 = s_2 \circ \tilde{G} .$$

Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant les points x_1 et x_2 comme origines. Puisque G est une conjugaison continue entre les compacts $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, elle est uniformément continue. Aussi elle envoie sous-ensembles fortement stables sur sous-ensembles fortement stables. D'après sa définition et la proposition 2.8.6, $\tilde{G}$ a la même propriété. Aussi, d'après 2.9.3, $\tilde{G}$ s'écrit en coordonnées:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log \omega(\xi_+)) ,$$

pour une certaine fonction ω de Λ_1 dans $]0, +\infty[$. Notons que ceci permet de définir $\tilde{G}$ sur $G\Lambda_1$ tout entier.

Comparons maintenant les métriques $d_1 = d_{x_1}$ et $d_2 = d_{x_2}$ sur Λ_1 et Λ_2: Soit ξ et ξ' deux points distincts de Λ_1, et p appartenant à $(\xi\xi')$. Soit γ l'élément de $G\Lambda_1$, vérifiant:

$$\gamma(-\infty) = \xi, \ \gamma(+\infty) = \xi' \quad \text{et} \quad \gamma(0) = p .$$

Les points $\tilde{G}(\gamma)(0)$ et $\tilde{G}(s_1(\gamma))(0)$ appartiennent à la géodésique $(\Omega(\xi)\Omega(\xi'))$ de X_2. D'après (4) ils sont égaux. Notons-les q. En coordonnées on a:

$$\gamma = (\xi, \xi', B_{\xi'}(x_1, p))$$

et

$$s_1(\gamma) = (\xi', \xi, B_{\xi}(x_1, p)) .$$

D'où:

$$\tilde{G}(\gamma) = (\Omega(\xi), \Omega(\xi'), B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi'))$$

et

$$\tilde{G}(s_1(\gamma)) = (\Omega(\xi'), \Omega(\xi), B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi))$$

donc

$$(5) \qquad B_{\Omega(\xi')}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi')}(x_2, \tilde{G}(\gamma)(0)) = B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi')$$

et

$$(6) \qquad B_{\Omega(\xi)}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi)}(x_2, \tilde{G}(s_1(\gamma))(0)) = B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi) .$$

Ainsi (5) et (6) donnent:

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

Puisque l'application Ω de (Λ_1, d_1) sur (Λ_2, d_2) est continue, ω l'est également. Alors, en faisant tendre ξ' vers ξ, Ω est conforme de facteur conforme ω. $\square$

RÉFÉRENCES

[Be] BENAKLI, N. *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global.* Thèse, Université de Paris-Sud, 1992.

[Bea] BEARDON, A.F. *The geometry of discrete groups.* G.T.M. 91, Springer, 1983.

[Ber] BERGER, M. *Géométrie, Vol. 3.* Cedric Nathan, 1978.

[C] COORNAERT, M. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov. *Pacific J. of Math. 159* (1993), 241-270.

[C-D-P] —— T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov.* Lecture Notes in Math. 1441. Springer, 1990.

[C-E-H-P-T] CANNON, J.W., D.B.A. EPSTEIN, D.F. HOLT, M.S. PATERSON et W.P. THURSTON. *Word processing and group theory.* Bartlett and Jones, Boston, 1992.

[Ch] CHAMPETIER, C. *Propriétés génériques des groupes de type fini.* Thèse, Université de Lyon I, 1991.

[F] FLOYD, W. J. Group completions and limits sets of Kleinian groups. *Invent. Math. 57* (1980), 205-218.

[G] GROMOV, M. *Hyperbolic groups.* In *"Essays in group theory"* (S.M. Gersten ed.), Springer (1987), 75-263.

[G-H] GHYS, E. et P. de la HARPE (eds.) *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov.* Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[H] HAMENSTÄDT, U. Time-preserving conjugacies of geodesic flows. *Ergod. Th. and Dynam. Sys. 12* (1992), 67-74.

[Ha] HAGLUND, F. *Les polyèdres de Gromov.* Thèse, Université de Lyon I, 1992.

[Ho] HOPF, E. Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature. *Bull. AMS, 77* (1971), 863-877.

[K] KAIMANOVICH, V.A. Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique, 53* (1990), 361-393.

[N] NICHOLLS, P.J. *The ergodic theory of discrete groups.* Cambridge University Press (1989).

[P] PATTERSON, S.J. *Lectures on measures on limit sets of kleinian groups.* In *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space.* Cambridge University Press (1987), 291-323.

[Pan] PANSU, P. Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A.I. Mathematica 14* (1989), 177-212.

[Su] SULLIVAN, D. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Publ. Math. I.H.E.S. 50* (1979), 171-202.

[Su2] —— Entropy, Hausdorff measures old and new and limit sets of geometrically finite kleinian groups. *Acta Math. 153* (1984), 259-277.

(Reçu le 22 février 1994)

Marc Bourdon

Université de Nancy I
Département de mathématiques
54506 Vandoeuvre-Les-Nancy
(France)