1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Quasi-convexe: Supposons X géodésique. Un sous-ensemble Z de X est C-quasi-convexe, si deux points quelconques de Z peuvent être reliés par un segment géodésique contenu dans le C-voisinage de Z dans X. Il est quasi-convexe, s'il est C-quasi-convexe pour un certain réel C.

1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Désormais, (X, d_X) est un espace métrique géodésique.

1.2.1. Définition

a) Le triangle $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X est δ-fin si pour tout u appartenant à $[xy]$, on a:

$$d_X(u, [yz] \cup [zx]) \leqslant \delta .$$

b) X est δ-hyperbolique si tout triangle de X est δ-fin. Il est hyperbolique, s'il est δ-hyperbolique pour un certain réel δ.

Observons qu'un espace δ-hyperbolique a la propriété suivante: deux segments géodésiques de mêmes extrémités, sont à distance de Hausdorff inférieure à δ. Autrement dit, chacun est contenu dans le δ-voisinage de l'autre.

1.2.2. Exemples (voir [C-D-P], chapitre 1, §4 et 5).

a) Un arbre métrique est 0-hyperbolique.

b) L'espace hyperbolique réel n-dimensionnel $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est log 3-hyperbolique.

c) D'après le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov, toute variété riemannienne simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

Une première propriété fondamentale des espaces hyperboliques est:

1.2.3. Théorème (Propriété des quasi-segments géodésiques).

Il existe une constante C ne dépendant que de λ, k, δ, avec la propriété suivante: tout (λ, k)-quasi-segment géodésique d'un espace δ-hyperbolique, est à distance de Hausdorff inférieure à C, de n'importe quel segment géodésique joignant ses extrémités.

Dont on déduit immédiatement:

1.2.4. Corollaire (Invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie).

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces géodésiques.

a) *Si* Y *est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de* X *dans* Y, *alors* X *est hyperbolique.*

b) *Si* X *et* Y *sont quasi-isométriques, alors* X *est hyperbolique si et seulement si* Y *l'est.*

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). *Soient* (X, d_X) (Y, d_Y) *deux espaces géodésiques et* f *une quasi-isométrie de* X *dans* Y. *Si* Y *est hyperbolique, l'image par* f *de tout quasi-convexe de* X *est un quasi-convexe de* Y.

1.3. CAT$(-b^2)$-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, et soit $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante $-b^2$.

A tout triangle $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X associons un triangle $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$ de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ dont les côtés ont même longueur que ceux de Δ. Le triangle $\bar{\Delta}$ est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à Δ. Soit:

$$\Delta \to \bar{\Delta}$$
$$s \mapsto \bar{s}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de Δ est une isométrie.

1.3.1. DÉFINITION

a) On dit que Δ satisfait CAT$(-b^2)$ (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient s, t appartenant à Δ:

$$d_X(s, t) \leqslant d_{\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}) .$$

b) X est un CAT$(-b^2)$-espace si tout triangle de X satisfait CAT$(-b^2)$.

Les CAT$(-b^2)$-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure $\leqslant -b^2$. En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

a) Deux points de X déterminent un unique segment géodésique.

b) X est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

c) X est contractible.