1.4. Bord d'un espace hyperbolique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de CAT$(-b^2)$-espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace X est dit à courbure inférieure ou égale à $-b^2$, si tout point de X admet un voisinage satisfaisant CAT$(-b^2)$. Si X est géodésique simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, alors X est un CAT$(-b^2)$-espace.

1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit (X, d_X) un espace δ-hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons $\mathscr{R}$ l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de X, on le note ∂X.

On définit une topologie sur $X \cup \partial X$, de la manière suivante:

Soit x une origine dans X, et soit $\mathscr{R}(x)$ l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma : I \to X$$

où I est un intervalle du type $[0, +\infty[$ ou $[0, a]$, $a \in \mathbf{R}^+$, et γ vérifie $\gamma(0) = x$. Si $I = [0, a]$, convenons de prolonger γ à $[0, +\infty[$, en posant $\gamma(t) = \gamma(a)$ pour t supérieur à a. Munissons $\mathscr{R}(x)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathscr{R}(x)$ est compact et l'application naturelle de $\mathscr{R}(x)$ dans $X \cup \partial X$ est surjective. Equipé de la topologie quotient, $X \cup \partial X$ est un compact, dans lequel l'espace métrique X est ouvert et dense. Ainsi le compact ∂X permet de compactifier X. On montre que la topologie est indépendante de l'origine x.

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent:

1.4.1. PROPOSITION

a) *Soit* $x \in X$, *et* $\xi \in \partial X$. *Il existe un rayon géodésique d'extrémités* x *et* ξ. *On le notera* $[x\xi)$. *Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 2δ.

b) *Soient* ξ *et* ξ' *deux points distincts de* ∂X. *Il existe une géodésique d'extrémités* ξ *et* ξ'. *On la notera* $(\xi\xi')$. *Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 4δ.

c) *(Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante* C *ne dépendant que de* δ, λ, k, *avec la propriété suivante: tout* (λ, k)*-quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de* X, *est à distance de Hausdorff inférieure à* C *d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de* X.

1.4.2. *Remarque.* Lorsque X est un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, deux points de $X \cup \partial X$ détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit X une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à $-b^2$. Etant donnée une origine x dans X, l'application exponentielle de l'espace tangent en x, induit un homéomorphisme de la sphère unité sur ∂X.

c) Soit X un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, et x une origine dans X. Notons $S(x, R)$ la sphère de centre x et de rayon R. Deux points de X déterminent un unique segment géodésique, donc pour $R \geqslant R'$, il existe une application naturelle de $S(x, R)$ dans $S(x, R')$. On montre que ∂X est homéomorphe à la limite projective des $S(x, R)$, lorsque R tend vers l'infini. Notons que le bord d'un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

De même qu'un changement conforme de métrique sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace δ-hyperbolique X,