Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR X

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1.4.1. PROPOSITION

a) *Soit* $x \in X$, *et* $\xi \in \partial X$. *Il existe un rayon géodésique d'extrémités* x *et* ξ. *On le notera* $[x\xi)$. *Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 2δ.

b) *Soient* ξ *et* ξ' *deux points distincts de* ∂X. *Il existe une géodésique d'extrémités* ξ *et* ξ'. *On la notera* $(\xi\xi')$. *Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 4δ.

c) *(Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante* C *ne dépendant que de* δ, λ, k, *avec la propriété suivante: tout* (λ, k)*-quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de* X, *est à distance de Hausdorff inférieure à* C *d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de* X.

1.4.2. *Remarque.* Lorsque X est un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, deux points de $X \cup \partial X$ détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit X une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à $-b^2$. Etant donnée une origine x dans X, l'application exponentielle de l'espace tangent en x, induit un homéomorphisme de la sphère unité sur ∂X.

c) Soit X un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, et x une origine dans X. Notons $S(x, R)$ la sphère de centre x et de rayon R. Deux points de X déterminent un unique segment géodésique, donc pour $R \geqslant R'$, il existe une application naturelle de $S(x, R)$ dans $S(x, R')$. On montre que ∂X est homéomorphe à la limite projective des $S(x, R)$, lorsque R tend vers l'infini. Notons que le bord d'un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

De même qu'un changement conforme de métrique sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace δ-hyperbolique X,

afin que $X \cup \partial X$ soit le complété de X pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C-D-P], [C], pour plus de détails). Ainsi ∂X hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire:

1.5.1. DÉFINITION. Soit x une origine dans X. Une métrique $d_{\partial X}$ sur ∂X a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de X de la façon suivante: Il existe une constante $C \geqslant 1$ et un réel $t > 1$, tels que pour tous éléments ξ, ξ' de ∂X:

$$C^{-1} t^{-d} \leqslant d_{\partial X}(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} .$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi \xi')) .$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres (x, t).

L'énoncé précis est le suivant: ([G], §7.2, [C-D-P], chapitre 11):

1.5.2. THÉORÈME (Gromov). *Il existe un réel* $t_0 > 1$, *ne dépendant que de* δ, *tel que pour tout* t *appartenant à* $]1, t_0[$, *le bord de* X *admette une métrique visuelle de paramètres* (x, t).

1.5.3. *Remarques*

a) Pour les CAT$(-b^2)$-espaces, le résultat est plus fin: leur bord admet une métrique visuelle de paramètre t, quel que soit t appartenant à $]1, e^b]$. Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W. J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que e^b est optimal car il l'est sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

b) Deux métriques visuelles d et d' de paramètres respectifs (x, t) et (x', t') sont facilement comparables: Si $t = t'$, alors elles sont Lipschitz-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$, telle que:

$$D^{-1} d \leqslant d' \leqslant D d .$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$ et un réel $\alpha > 0$, tels que:

$$D^{-1} d^{\alpha} \leqslant d' \leqslant D d^{\alpha} .$$

Ici α est égal à $\log t' / \log t$.

c) D'après b), toute isométrie de X est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de X muni d'une métrique visuelle.