2.6. Structure conforme sur X

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

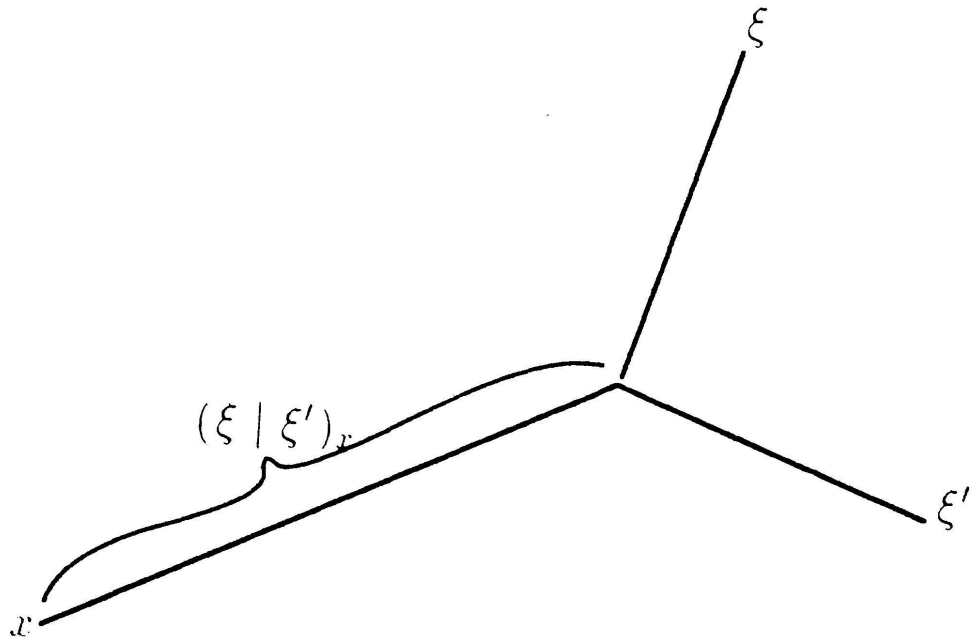

FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR ∂X

Nous montrons maintenant que la famille de métriques $\{d_x, x \in X\}$, définit une structure conforme sur ∂X. On a:

2.6.1. PROPOSITION. *Soit x une origine dans X et y, z deux éléments de X. La fonction sur $(\partial X, d_x)$, définie par:*

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. *Preuve.* D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a:

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z) .$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur $(\partial X, d_x)$. D'après la définition des métriques d_x et d'après la relation 2.4.2, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))}$$

ou encore

$$B_\xi(x, y) = 2\log d_y(\xi, \xi') - 2\log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y) . \tag{1}$$

Supposons que ∂X ne soit pas réduit à un point. Soit alors V un petit voisinage compact de ξ, et ξ' un élément fixé en dehors de V. La fonction:

$$\xi \mapsto 2 \log d_x(\xi, \xi')$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Les métriques d_x et d_y étant des métriques visuelles de paramètres respectifs (x, e) et (y, e), elles sont Lipschitz-équivalentes (voir 1.5.3.b). Donc la fonction

$$\xi \mapsto 2 \log d_y(\xi, \xi')$$

est également lipschitzienne sur (V, d_x). Dès lors, par la relation (1), la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Maintenant la compacité de $(\partial X, d_x)$ montre qu'elle est lipschitzienne sur ∂X. $\square$

2.6.3. COROLLAIRE.

a) *Quels que soient les éléments x et y de X, les métriques d_x et d_y sont conformes.*

b) *Soit g une isométrie de X. Alors g est une application conforme de $(\partial X, d_x)$, dont le facteur conforme en ξ est:*

$$|g'(\xi)|_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

2.6.4. *Preuve:*

a) D'après la relation 2.4.2 et la définition des métriques d_x, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))} .$$

Donc la proposition 2.6.1 donne:

$$\frac{d_y(\xi, \xi')}{d_x(\xi, \xi')} \underset{\xi' \to \xi}{\to} e^{B_\xi(x,y)}$$

ce qui montre que d_x et d_y sont conformes.

b) Puisque g est une isométrie de X, on a:

$$(g\xi \mid g\xi')_x = (\xi \mid \xi')_{g^{-1}x} .$$

Donc:

$$d_x(g\xi, g\xi') = d_{g^{-1}x}(\xi, \xi')$$

et la fin de la preuve est identique au (a). $\square$

2.6.5. EXEMPLES.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ et x le centre du modèle en boule. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$ agit par transformations conformes sur la sphère S^n munie de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme en ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$. D'après l'exemple 2.5.9(a) on a:

$$\| g'(\xi) \| = | g'(\xi) |_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

b) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ et normalisons la métrique afin que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Soit x le centre du modèle en boule.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ laisse invariant le champ d'hyperplans $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$, défini par:

$$P_\xi = \{u \in T_\xi S^{2n-1};\ h(\xi, u) = 0\}$$

où h est la forme hermitienne de $\mathbf{C}^n$:

$$h(\xi, u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{u}_i .$$

Il agit par transformations conformes sur $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$ muni de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme sur P_ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$. Nous allons voir qu'à nouveau:

$$\| g'(\xi) \| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} = | g'(\xi) |_x .$$

Pour ce faire, ramenons-nous à l'exemple a) par un argument de D. Sullivan ([Su], p. 176). Observons tout d'abord que $\| g'(\xi) \|$ ne dépend que de $g^{-1}x$. En effet, si $h \in \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, alors la composée $g \circ h^{-1}$ fixe x le centre du modèle en boule, donc $g \circ h^{-1}$ appartient à $U(n)$ et:

$$\| g'(\xi) \| = \| h'(\xi) \| .$$

Choisissons donc judicieusement h. Notons y l'intersection de l'horosphère H_ξ, basée en ξ, contenant $g^{-1}x$, avec la géodésique $(x\xi)$. Le stabilisateur de H_ξ dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ agit transitivement sur H_ξ, de plus le facteur conforme de ses éléments en P_ξ est 1. Soit p un élément de $\mathrm{Stab}(H_\xi)$, vérifiant

$$p(g^{-1}x) = y .$$

Soit aussi une copie de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ contenant la géodésique $(x\xi)$. L'espace tangent à son bord en ξ est contenu dans P_ξ. Soit t un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ qui fixe cette copie et envoie y sur x.

D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une* τ*-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une* τ*-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus: