2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2.7.5. THÉORÈME.

a) *La dimension* τ *est égale au taux de croissance de* Γ *dans* X. *C'est-à-dire:*

$$\tau = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\} .$$

b) *La* ν_x*-mesure d'une boule de* (Λ, d_x), *est proportionnelle à son rayon à la puissance* τ. *Autrement dit: il existe une constante* $C_x \geqslant 1$, *telle que pour toute boule* $B(\xi, r)$ *centrée sur* Λ, *on ait:*

$$C_x^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B(\xi, r)) \leqslant C_x r^\tau .$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats: Soit $\alpha_0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\}$. S.J. Patterson a exhibé une mesure α_0-conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α-mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ, les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ-mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ-mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X. Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X, dont les extrémités appartiennent à Λ:

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbf{R} \to X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\} .$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt .$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.

En effet, on a:

2.8.1. PROPOSITION. *Quel que soit* $T \geqslant 0$, *alors:*

$$e^{-T} \sup_{t \in [-T,T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \leqslant |\gamma - \gamma'|_{GA}$$
$$\leqslant \sup_{t \in [-T,T)} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T} .$$

2.8.2. *Preuve.* L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3):

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X . \qquad \square$$

Clairement, le groupe Γ agit par isométries sur $(G\Lambda, |\ |_{G\Lambda})$ de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient:

$$\mathscr{E} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire (X, Γ). Notons que $\mathscr{E}$ est compact. En effet, Γ est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de Λ par Γ est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de $G\Lambda$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$, provenant de l'action naturelle de $\mathbf{R}$ sur $G\Lambda$. Il est défini par:

$$\Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \quad \text{avec} \quad \gamma_T(t) = \gamma(t + T) . \tag{2.8.3}$$

Remarquons que pour tout $T \in \mathbf{R}$, $g \in \Gamma$, et $\gamma \in G\Lambda$:

$$\Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma) . \tag{2.8.4}$$

Le flot géodésique de $\mathscr{E}$ est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur $\mathscr{E}$ par la relation 2.8.4. On le notera encore $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$.

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de $(G\Lambda, \Phi_T)$. En $\gamma \in G\Lambda$, ils sont respectivement définis par:

$$W^{ss}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \mid |\Phi_T(\eta) - \Phi_T(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\}$$

$$W^{uu}(\gamma) = \left\{\eta \in G\Lambda \mid |\Phi_{-T}(\eta) - \Phi_{-T}(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0\right\} .$$

Ils forment un feuilletage Φ_T-invariant de $G\Lambda$. D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante:

$$(2.8.5)\quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à Λ privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de $(\mathscr{E}, \Phi_T)$ par:

2.8.6. DÉFINITION. *Soit π la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$, alors:*

$$W^{ss}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{ss}(\gamma))$$
$$W^{uu}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{uu}(\gamma))\,.$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de $G\Lambda$ en γ, est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de γ sous Φ_T. En d'autres termes:

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\}$$
$$W^u(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,.$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de $\mathscr{E}$. D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de $G\Lambda$, via la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$.

2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE $(\mathscr{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine x dans X. Soit Δ la diagonale de $\Lambda \times \Lambda$. On définit une application de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ dans $G\Lambda$, de la manière suivante: à

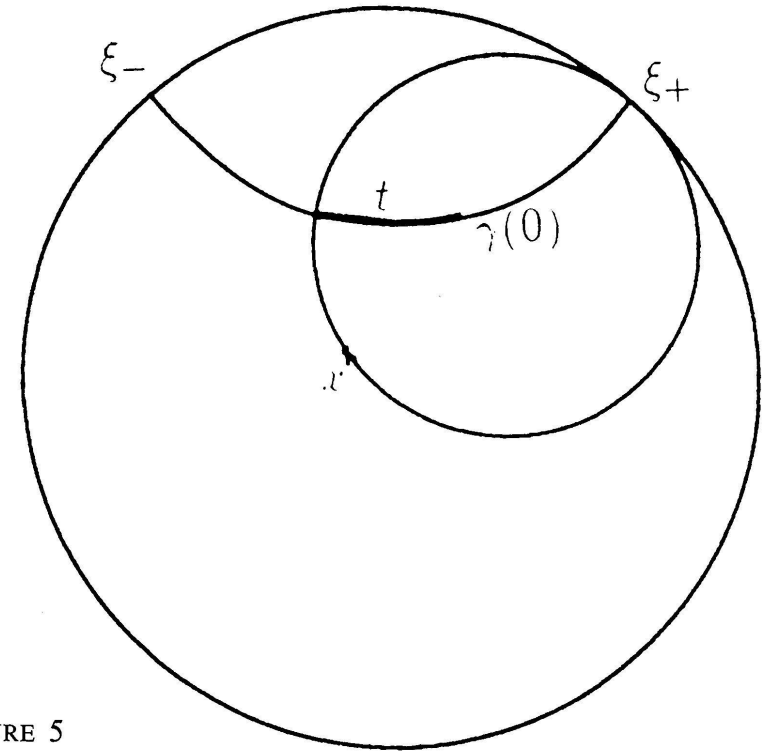

FIGURE 5