Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

Autor: Bayer-Fluckiger, Eva

Kapitel: 7. Applications

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61819

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

forme quadratique f comme $f \simeq <1> \oplus f'$. Alors $k(f) = F(\sqrt{-f'(X')})$, où $X' = (X_2, \ldots, X_m)$ et $F = k(X')$. Supposons $q_{k(f)}$ isotrope. Alors par [4], 2.5.1, on a:

$$q_F \simeq a <1, f'(X')> \oplus q' \simeq <a> \oplus q'' .$$

Donc $a \in D(q_F) \subset D_m(q)$.

D'autre part, $<1, f'(X')>$ représente f sur $F(X_1) = k(X_1, \ldots, X_m)$. Donc $a <1, f'(X')>$ représente af sur $k(X_1, \ldots, X_m)$. On en déduit que $af \in D_m(q)$. Comme $a \in D_m(q)$, on a $f \in <D_m(q)>$.

7. Applications

Voici quelques applications du théorème 1:

Sommes de carrés

Corollaire 1. *Soit s un entier positif. Si un polynôme $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \ldots, X_m)$, alors tout polynôme irréductible et unitaire divisant f avec un exposant impair est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \ldots, X_m)$.*

Soit q la forme quadratique somme de 2^s carrés. Alors q est une forme de Pfister, donc $D(q) = <D(q)>$ (cf. [4], chap. 2, §10 ou [3], chap. 10, cor. 1.7). Le corollaire découle de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, appliqué au produit des polynômes irréductibles divisant f avec un exposant impair.

Le cas $m = 1$ de ce corollaire est dû à Kaplansky (cf. [4], chap. 10, cor. 2.10).

Principe de Hasse

Soit k un corps de nombres. On note v une place (finie ou infinie) de k, et k_v le complété de k en v. Soit q une forme quadratique anisotrope sur k.

Corollaire 2. *Soit $f \in k[X]$. Alors*

$$f \in <D(q_{k_v(X)})> \text{ pour toute place } v \text{ de } k \Leftrightarrow f \in <D(q_{k(X)})> .$$

Il est clair que $f \in <D(q_{k(X)})> \Rightarrow f \in <D(q_{k_v(X)})>$ pour toute place v de k.

Montrons la réciproque. Par le théorème de Hasse-Minkowski (voir par exemple [4], chap. 6, §6, cor. 6.6a)), si $a \in k$ est tel que $a \in D(q_{k_v})$ pour toute place v de k, alors $a \in D(q)$. Donc, par la partie $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, on peut supposer que f est irréductible et unitaire.

Supposons que $f \in <D(q_{k_v(X)})>$ pour toute place v de k. Alors la partie $b) \Rightarrow c)$ du théorème 1 implique que $q_{k_v(f)}$ est isotrope pour toute place v de k. Par le théorème de Hasse-Minkowski (cf. [4], chap. 6, §6, th. 6.5), on en déduit que $q_{k(f)}$ est isotrope. Donc, par la partie $c) \Rightarrow b)$ du théorème 1, $f \in D(q_{k(X)})$.

Une variante du nombre de Pythagore

Pour tout corps F et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $D_F(n) \subset F^*/F^{*2}$ l'ensemble des sommes de n carrés d'éléments de F, et $<D_F(n)>$ le sous-groupe de F^*/F^{*2} engendré par $D_F(n)$.

Lorsque $F = k(X_1, \ldots, X_m)$, on note $D_m(n) = D_F(n)$.

Rappelons que le *niveau* d'un corps F, noté $s(F)$, est par définition le plus petit entier s tel que $-1 \in D_F(s)$. Si -1 n'est pas une somme de carrés dans F, alors on pose $s(F) = \infty$, et l'on dit que F est *formellement réel.*

Corollaire 3. *Supposons que k soit formellement réel. Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ un polynôme irréductible et unitaire. Alors*

$$f \in <D_m(n)> \Leftrightarrow s(k(f)) < n .$$

Soit q la forme quadratique somme de n carrés. Comme k est formellement réel, q est anisotrope. Il est clair que

$$s(k(f)) < n \Leftrightarrow q_{k(f)} \text{ isotrope} .$$

Par le corollaire du théorème 1, on a

$$q_{k(f)} \text{ isotrope} \Leftrightarrow f \in <D_m(n)> .$$

Ceci démontre le corollaire.

Soit $D_F(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_F(n)$. Le *nombre de Pythagore* $p(F)$ de F est le plus petit entier n tel que $D_F(n) = D_F(\infty)$. S'il n'existe aucun entier avec cette propriété, alors on pose $p(F) = \infty$.

Notation. On note $p'(F)$ le plus petit entier n tel que $<D_F(n)> = D_F(\infty)$. S'il n'existe aucun entier avec cette propriété, alors on pose $p'(F) = \infty$.

COROLLAIRE 4. *Supposons que* k *soit formellement réel, et que* $m \geqslant 1$. *Alors* $p'(k(X_1, \ldots, X_m)) = \sup\{s(k(f)) + 1, f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ *unitaire et irréductible, avec* $s(k(f)) < \infty\}$.

Démonstration. Posons

$$p' = p'(k(X_1, \ldots, X_m)),$$

$$p'' = \sup\{s(k(f)) + 1, f \in k[X_1, \ldots, X_m] \text{ unitaire et irréductible, avec } s(k(f)) < \infty\}.$$

Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ irréductible et unitaire. Si $f \in \langle D_m(n) \rangle$, alors par le corollaire 3 on a $s(k(f)) < n$. Donc $p'' \leqslant p'$. Réciproquement, si $s(k(f)) < n$ alors par le corollaire 3 $f \in \langle D_m(n) \rangle$ pour tout polynôme irréductible et unitaire de $k[X_1, \ldots, X_m]$. Pour montrer que $p' \leqslant p''$, il reste donc à démontrer que $p'(k) \leqslant p''$. Soit $d \in k^*$ une somme de carrés, $d \notin k^{*2}$. Posons $f(X) = X^2 + d \in k[X]$. Alors f est un polynôme unitaire et irréductible. On a $k(f) = k(\sqrt{-d})$. Supposons que $s(k(f)) = n$. Alors il existe $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in k$ tels que $-1 = (a_1 + b_1\sqrt{-d})^2 + \ldots + (a_n + b_n\sqrt{-d})^2$. Alors $-1 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 - d(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$. Donc $d(b_1^2 + \ldots + b_n^2)^2 = (a_1^2 + \ldots + a_n^2 + 1) \cdot (b_1^2 + \ldots + b_n^2)$. Ceci entraîne que $d \in \langle D_k(n+1) \rangle$.

En utilisant des résultats de Colliot-Thélène et Jannsen [1], on obtient

COROLLAIRE 5. *Soient* k *un corps de nombres réel,* X, Y *et* Z *des variables. Alors*

a) $p'(k(X)) = 2, 3$ *ou* 5;

b) $p'(k(X, Y)) = 2, 3$ *ou* 5;

c) $p'(k(X, Y, Z)) = 2, 3, 5$ *ou* 9.

En effet, par [1], th. 4.1, (b) et (c), on voit que $s(k(f)) = 1, 2, 4$ ou ∞ si f est un polynôme irréductible et unitaire de $k[X]$ ou $k[X, Y]$ et $s(k(f)) = 1, 2, 4, 8$ ou ∞ si f est un polynôme irréductible et unitaire de $k[X, Y, Z]$. Par le corollaire précédent, ceci démontre l'affirmation.

Le corollaire ci-dessus et les résultats et conjectures de [1] suggèrent la conjecture suivante:

CONJECTURE. *Soit* k *un corps de nombres réel, et soient* $X_1, \ldots, X_m$ *des variables,* $m \geqslant 4$. *Alors* $p'(k(X_1, \ldots, X_m))$ *est de la forme*

$$p'(k(X_1, \ldots, X_m)) = 2^r + 1,$$

où $r \in \{0, \ldots, m\}$.

Finalement, remarquons que le cas des corps de nombres totalement imaginaires est beaucoup plus simple :

PROPOSITION. *Soit* k *un corps de nombres totalement imaginaire. Alors*

$$p'(k(X_1, \ldots, X_m)) = 2, 3 \quad ou \quad 5 ,$$

quel que soit $m \geqslant 1$.

En effet, si k est totalement imaginaire, alors $s(k) = 1, 2$ ou 4 (voir par exemple [4], chap. XI). Comme tout élément d'un corps de caractéristique différente de 2 peut s'écrire comme différence de deux carrés, on a $p(k(X_1, \ldots, X_m)) \leqslant 5$, quel que soit m. Le lemme suivant montre que si $p(k(X_1, \ldots, X_m)) = 4$, alors $p'(k(X_1, \ldots, X_m)) \leqslant 3$. Ceci démontre la proposition.

LEMME. *Soit* F *un corps de caractéristique différente de* 2. *Alors*

$$D_F(4) \subset D_F(3) \,.\, D_F(3) \subset \langle D_F(3) \rangle \ .$$

Soit $H = (-1, -1)$ l'algèbre de quaternions de Hamilton sur F. Soit H' le sous-groupe additif des quaternions purs de H. Notons N la norme réduite. Alors $N(H) = D_F(4)$, $N(H') = D_F(3)$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que pour tout $a \in H$, il existe $b \in H'$ tel que $ab \in H'$. Mais cette condition consiste en une équation linéaire en trois variables, laquelle a toujours une solution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et U. JANNSEN. Sommes de carrés dans les corps de fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris 312* (1991), 759-762.

[2] GILLE, Ph. R-équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne. *C. R. Acad. Sci. Paris 316* (1993), 315-320.

[3] KNEBUSCH, M. Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. *Acta Arithmetica 24* (1973), 279-299.

[4] LAM, T.Y. *Algebraic Theory of Quadratic Forms.* Benjamin (1973).

[5] MERKURJEV, A. Norm principle for algebraic groups. *Journal Algebra and Analysis,* à paraître.

[6] —— R-equivalence on adjoint classical groups. Notes manuscrites, octobre 1993.

[7] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms.* Grundlehren Math. Wiss 270, Springer-Verlag (1985).