Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE E^3

Autor: Burlet, Oscar / Haab, François

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61823

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 41 (1995), p. 155-178

UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE E^3

par Oscar BURLET et François HAAB[1]

1. INTRODUCTION

Le problème de la rigidité des surfaces (sous-variétés de dimension deux) dans l'espace euclidien E^3 consiste à savoir dans quelle mesure deux surfaces peuvent être isométriques, sans que cette isométrie soit réalisée par une isométrie globale de E^3. Pour des raisons pratiques, nous appelons *congruence* une isométrie globale de E^3 et nous disons que deux surfaces sont *congruentes* si elles se correspondent par une congruence. La question que nous nous posons est donc de savoir si une surface donnée dans E^3 est la seule, à congruence près, qui lui soit isométrique? Si la réponse est oui, nous dirons qu'elle est *rigide*.

L'un des résultats les plus anciens dans cette direction est probablement le théorème de Cauchy qui affirme qu'une surface polyédrale convexe est rigide. En ce qui concerne les surfaces lisses qui nous préoccupent ici, on peut mentionner le théorème de Cohn-Vossen [4], qui affirme que deux surfaces analytiques, convexes et compactes qui sont isométriques sont nécessairement congruentes. Ce résultat a été étendu, par Herglotz au cas des surfaces trois fois continument différentiables (C^3). Il s'avère qu'il est encore vrai dans le cas des surfaces C^2 mais qu'il est faux dans le cas des surfaces C^1, voir Connelly [6]. Par ailleurs un résultat d'Alexandroff [1] affirme que si deux surfaces analytiques tendues, dans E^3, sont isométriques elles sont congruentes (une surface dans E^3 est dite *tendue* si tout plan de E^3 la divise en au plus deux composantes connexes).

Rappelons qu'une surface est dite *minimale* si sa courbure moyenne est nulle. A notre connaissance on ne sait pas s'il existe des surfaces minimales, rigides au sens précédent. En revanche, pour les surfaces minimales, Choi,

[1]) Les recherches du second auteur ont été partiellement soutenues par le CNPQ-Brésil (subvention: 301003/90.4).

Meeks et White on introduit récemment la notion de *rigidité minimale*, rappelée plus bas [3]. Ces auteurs ont aussi établi des critères pour montrer que certaines surfaces sont minimalement rigides. Ainsi le caténoïde est une surface minimalement rigide, comme d'ailleurs toute surface minimale à deux bouts (voir plus bas ou voir [3]). Par contre toute surface minimale simplement connexe, dont la courbure de Gauss n'est pas identiquement nulle, n'est *pas* minimalement rigide (voir théorème 1). Si la courbure de Gauss d'une surface minimale complète est identiquement nulle, Osserman montre que cette surface est un plan, elle est donc minimalement rigide [10]. Cette rigidité minimale reste vraie pour une surface minimale connexe, avec courbure de Gauss nulle et qui n'est pas nécessairement complète. En effet, dans ce cas, la surface en question est un ouvert d'un plan et toute isométrie entre ouverts plans connexes est une congruence. Remarquons qu'un plan est minimalement rigide, sans être rigide (on peut le courber). Cette propriété n'est pas spécifique au plan. Dans le chapitre d'exemples, nous donnons une surface réglée isométrique et non congruente au caténoïde.

Notre premier objectif dans ce travail est de reformuler certains critères de [3], d'en donner de nouvelles preuves, et d'en déduire quelques conséquences non explicites dans [3]. L'une de ces conséquences est qu'une surface minimale non orientable immergée isométriquement dans E^3 est minimalement rigide. Le résultat principal de [3] dit qu'une surface minimale complète proprement plongée dans E^3 qui possède plus d'un bout est minimalement rigide. Nous en redonnons ici la démonstration dans le cas plus simple où la courbure totale est finie. Récemment, Collin [5] a montré que cette condition sur la courbure totale est équivalente à la finitude du type topologique, ceci pour les surfaces minimales proprement plongées ayant au moins deux bouts. Lorsqu'on considère des surfaces immergées il n'en va plus de même. Nous exhibons dans le chapitre d'exemples un anneau minimal complet, immergé dans E^3, et qui n'est pas minimalement rigide.

2. Résultats

Nous convenons ici qu'une *surface* M est une variété riemannienne de dimension deux qui est connexe, sans bord, séparée, à base dénombrable et infiniment différentiable. Une surface n'est pas nécessairement complète. Deux immersions isométriques f, g de M dans l'espace euclidien E^3 de dimension trois sont *congruentes* s'il existe une isométrie A de E^3 telle que $g = A \circ f$. Une immersion isométrique $f: M \to E^3$ est *minimale* si, pour tout $p \in M$, il