2. La conjecture abc

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. La conjecture abc

Dans cette partie, nous allons rappeler la conjecture abc, ainsi que les quelques tentatives qui ont été faites pour essayer de la démontrer. La définition suivante est étroitement liée à la conjecture abc.

Définition 2.1. *Soit n un entier non nul. On appelle radical de n et on écrit $r(n)$ le produit*

$$r(n) = \prod_{p \mid n} p \quad (p \text{ premier})$$

des facteurs premiers distincts divisant n, avec par convention $r(1) = 1$.

Le radical est quelquefois appelé support, conducteur ou noyau et vérifie $r(n) \mid n$.

Motivés par un théorème de Mason ([10], [20]) sur les polynômes et par certaines conjectures de Szpiro [31], J. Oesterlé et D.W. Masser ont formulé en 1985 la conjecture suivante, plus connue sous le nom de conjecture abc [20]:

Conjecture 2.2. (abc). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs, vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$ on ait:*

$$c \leqslant c(\varepsilon)\,(r(abc))^{1+\varepsilon}\,.$$

Une première analyse de l'inégalité de la conjecture abc montre que si un triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifie $a + b = c$ et $(a, b) = 1$, alors le produit abc est composé de nombres premiers distincts avec pour la plupart un exposant relativement petit. On peut constater ce fait dans les tables de factorisation de nombres de la forme $a^n - b^n$, données à la fin du livre de H. Riesel (voir [24], pp. 388-437).

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, la constante $c(\varepsilon)$ qui lui correspond dans la conjecture abc peut être unique, en prenant:

$$c(\varepsilon) = \inf_{(a,b,c) \in I} \frac{c}{(r(abc))^{1+\varepsilon}}\,, \tag{2.3}$$

avec $I = \{(a, b, c) \in \mathbf{N}^3,\ (a, b) = 1,\ a + b = c\}$. Quant à la possibilité de prendre $\varepsilon = 0$ dans la conjecture abc, la proposition suivante montre que ce choix n'est pas possible.

PROPOSITION 2.4. *Pour* $\varepsilon > 0$, *soit* $c(\varepsilon)$ *la constante définie par* (2.3) *vérifiant l'inégalité de la conjecture* abc. *Alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = +\infty .$$

Preuve. On définit les entiers x_n et y_n par la relation:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n .$$

Alors pour tout $n \geqslant 1$, $1 + 2y_n^2 = x_n^2$. Si $n = 2^m$, on vérifie facilement par récurrence que $2^{m+1} \mid y_n$. Appliquons la conjecture abc à la relation $x_n^2 = 1 + 2y_n^2$. On obtient pour $n = 2^m$:

$$x_n^2 \leqslant c(\varepsilon)\,(r(x_n y_n))^{1+\varepsilon} \leqslant c(\varepsilon)\,(x_n y_n/2^m)^{1+\varepsilon} \leqslant c(\varepsilon) x_n^{2(1+\varepsilon)}/2^{m(1+\varepsilon)} .$$

Alors $c(\varepsilon) \geqslant 2^{m(1+\varepsilon)}/x_n^{2\varepsilon}$ et donc

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) \geqslant 2^m ,$$

ce qui montre que $\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = +\infty$. $\square$

Des démonstrations différentes de la proposition 2.4. se trouvent dans [10] et [20].

Depuis sa formulation en 1985, peu de résultats théoriques ont été découverts sur la conjecture abc. Il n'existe actuellement que deux théorèmes la concernant. Les démonstrations de ces deux théorèmes s'appuyent sur des méthodes utilisant des formes linéaires de logarithmes complexes et p-adiques. Nous donnons ici ces deux théorèmes. Leurs démonstrations se trouvent dans [29] et [30] respectivement.

THÉORÈME 2.5. (Stewart, Tijdeman, 1986). *Il existe une constante effectivement calculable* $k > 0$ *telle que, pour tout triplet* (a, b, c) *d'entiers positifs, vérifiant* $a + b = c$ *et* $(a, b) = 1$ *on ait:*

$$c < \exp\{k(r(abc))^{15}\} .$$

THÉORÈME 2.6. (Stewart, Yu, 1990). *Il existe une constante effectivement calculable* $k > 0$ *telle que, pour tout triplet* (a, b, c) *d'entiers positifs, vérifiant* $a + b = c$ *et* $(a, b) = 1$ *on ait:*

$$c < \exp\{(r(abc))^{2/3 + k/\log\log r(abc)}\} .$$

Remarquons que les inégalités des deux théorèmes ci-dessus sont exponentielles en $r(abc)$, alors que l'inégalité de la conjecture abc est seulement polynomiale.