Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 42 (1996)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONJECTURE abc
Autor: Nitaj, Abderrahmane
Kapitel: 3. Applications de la conjecture abc
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87869

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. Applications de la conjecture abc

Dans cette partie, nous décrivons la plupart des conséquences de la conjecture abc montrant ainsi son importance en théorie des nombres.

3.1. Les conjectures de Szpiro

Les conjectures de Szpiro sont antérieures (1983) à la conjecture abc et certaines d'entre elles ont les mêmes conséquences. Nous donnons deux de ces conjectures. La conjecture suivante est une conséquence de la conjecture abc et a été très étudiée ([13], [15], [17], [31]).

Conjecture 3.1.1. (Szpiro, forme forte). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $c(\varepsilon) > 0$ *telle que pour toute courbe elliptique semi-stable* E *sur* $\mathbf{Q}$, *de discriminant minimal* Δ_E *et de conducteur* N_E *on ait:*

$$|\Delta_E| \leqslant c(\varepsilon) N_E^{6+\varepsilon} .$$

Le conducteur d'une courbe elliptique semi-stable est le radical de son discriminant minimal. Pour une définition exacte du conducteur, on peut consulter [27].

La conjecture suivante est connue aussi sous le nom de conjecture de Lang-Szpiro.

Conjecture 3.1.2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout couple* (A, B) *d'entiers premiers entre eux, il existe une constante* $c(\varepsilon, A, B) > 0$ *telle que pour tous les entiers* u, v, k *vérifiant* $(Au, Bv) = 1$ *et* $k = Au^3 + Bv^2$, *on ait:*

$$|u| \leqslant c(\varepsilon, A, B) r(k)^{2+\varepsilon} \quad \text{et} \quad |v| \leqslant c(\varepsilon, A, B) r(k)^{3+\varepsilon} .$$

Proposition 3.1.3. *La conjecture* abc *est équivalente à la conjecture 3.1.2.*

Preuve. Admettons d'abord la conjecture abc. Soient A, B, u, v et k des entiers tels que $(Au, Bv) = 1$ et $k = Au^3 + Bv^2$. La conjecture abc donne:

$$|v|^2 \leqslant \frac{c_1(\varepsilon)}{|B|} (r(ABuvk))^{1+\varepsilon} \leqslant c_2(\varepsilon, A, B) |uv|^{1+\varepsilon} (r(k))^{1+\varepsilon} .$$

Supposons que $|Au^3| \leqslant |Bv^2|$ (le cas inverse se fait de la même manière), alors $|u| \leqslant c_3(A, B)\,|v|^{2/3}$. En reportant cette majoration dans l'inégalité ci-dessus, on obtient:

$$|v|^2 \leqslant c_4(\varepsilon, A, B)\,|v|^{5(1+\varepsilon)/3}(r(k))^{1+\varepsilon}\,,$$

et par suite:

$$|v|^{(1-5\varepsilon)/3} \leqslant c_4(\varepsilon, A, B)\,r(k)^{1+\varepsilon}\,.$$

Prenons ε tel que $1 - 5\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' = 18\varepsilon/(1 - 5\varepsilon)$, alors:

$$|v| \leqslant c_5(\varepsilon, A, B)\,(r(k))^{3(1+\varepsilon)/(1-5\varepsilon)} \leqslant c_6(\varepsilon', A, B)\,(r(k))^{3+\varepsilon'}\,.$$

On obtient alors pour $|u|$:

$$|u| \leqslant c_6^{2/3}(\varepsilon', A, B)\,c_3(A, B)\,r(k)^{2(3+\varepsilon')/3} \leqslant c_7(\varepsilon', A, B)\,(r(k))^{2+\varepsilon'}\,.$$

Ceci prouve la conjecture 3.1.2.

Inversement, admettons la conjecture 3.1.2. Soient a, b et c des entiers positifs vérifiant $a < b$, $a + b = c$ et $(a, b) = 1$. Alors:

$$(a^2 + ab + b^2)^3 - ((b - a)(a + 2b)(2a + b)/2)^2 = 3^3(ab(a + b)/2)^2\,.$$

Cette relation peut être éventuellement simplifiée par 3^3 si $a \equiv b \pmod 3$. En appliquant la conjecture 3.1.2, on obtient:

$$a^2 \leqslant b^2 \leqslant a^2 + ab + b^2 \leqslant c_1(\varepsilon)(r(abc))^{2+\varepsilon}\,,$$

et donc:

$$a \leqslant b \leqslant (c_1(\varepsilon))^{1/2}(r(abc))^{1+\varepsilon/2}\,,$$

et finalement:

$$c \leqslant c(\varepsilon')\,(r(abc))^{1+\varepsilon'}\,.$$

Ceci prouve la conjecture abc. □

3.2. Conséquences sur les triplets d'entiers

Les propositions suivantes montrent l'influence de la conjecture abc sur l'architecture des triplets d'entiers.

Proposition 3.2.1. *Si la conjecture abc est vraie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ telle que pour tout triplet*

(x_1, x_2, x_3) *d'entiers positifs, vérifiant* $x_1 + x_2 = x_3$ *et* $(x_1, x_2) = 1$, *un des* $x_i, i \in \{1, 2, 3\}$, *vérifie:*

$$x_i \leqslant c(\varepsilon)\,(r(x_i))^{3+\varepsilon}\,.$$

Cette proposition fait apparaître un lien entre la conjecture abc et le théorème de Fermat. Nous avons aussi le résultat suivant:

THÉORÈME 3.2.2. *Si la conjecture* abc *est vraie, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout entier* $a \geqslant 1$, *il existe une constante* $c_1(\varepsilon, a) > 0$ *telle que pour tout entier* $n \geqslant 2$ *et tout entier* $x \geqslant 2$ *vérifiant* $(a, x) = 1$ *on ait:*

$$x^{n-1} \leqslant c_1(\varepsilon, a)\,(r(x^n - a^n))^{1+\varepsilon}\,.$$

Preuve. Soit ε fixé tel que $0 < \varepsilon < 1/2$. Appliquons la conjecture abc à la relation $(x^n - a^n) + a^n = x^n$ avec $(a, x) = 1$. On obtient:

$$x^n \leqslant c(\varepsilon, a)\,(r(x^n - a^n))^{1+\varepsilon} x^{1+\varepsilon}\,,$$

Alors:

$$x^{n-1} \leqslant (c(\varepsilon, a))^{(n-1)/(n-1-\varepsilon)} (r(x^n - a^n))^{(n-1)(1+\varepsilon)/(n-1-\varepsilon)}\,.$$

Si ε est assez petit et si $n \geqslant 2$, on a d'une part $(n-1)/(n-1-\varepsilon) < 2$ et d'autre part:

$$\frac{(n-1)\,(1+\varepsilon)}{n-1-\varepsilon} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon'\,,$$

avec $\varepsilon' = 2\varepsilon/(1-\varepsilon)$. On obtient finalement la conclusion du théorème. □

3.3. LES NOMBRES DE WIEFERICH

Un nombre premier p vérifiant la congruence

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

avec $a = 2$ est appelé nombre de Wieferich. En 1909, celui-ci a montré que si un nombre premier p ne vérifie pas la congruence ci-dessus, alors il n'existe pas d'entiers $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, premiers entre eux, tels que $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $x^p + y^p = z^p$ (premier cas du théorème de Fermat). En 1910, Mirimanoff a prouvé la même chose avec $a = 3$. Les nombres premiers vérifiant cette congruence sont très rares. Par exemple, les seuls nombres premiers p vérifiant cette congruence avec $a = 2$ et $p \leqslant 3 \times 10^{10}$ sont 1093 et 3511. De même, les seuls vérifiant cette congruence avec $a = 3$ et $p \leqslant 2^{30}$ sont 11 et 1006003 (voir [14] ou [22]). Un problème encore ouvert est la conjecture suivante:

CONJECTURE 3.3.1. *Soit* $a \geqslant 2$. *Il existe une infinité de nombres premiers* p *tels que* $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

J. H. Silverman [28] a montré que cette conjecture est une conséquence de la conjecture abc.

3.4. LA CONJECTURE DE MORDELL

Une des conséquences les plus étonnantes de la conjecture abc est le fait que celle-ci implique tout simplement la conjecture de Mordell, devenue théorème de Faltings:

Toute courbe de genre $g \geqslant 2$ *définie sur* $\mathbf{Q}$ *n'admet qu'un nombre fini de points rationnels.*

Cette conjecture a été redémontrée par la suite par P. Vojta [34] et E. Bombieri [1]. En 1991, N. D. Elkies a déterminé son lien avec la conjecture abc (voir [4]).

THÉORÈME 3.4.1. (Elkies). *La conjecture* abc *implique la conjecture de Mordell.*

A la fin de son article, Elkies donne le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.4.2. (Elkies). *La conjecture* abc *implique que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout polynôme* $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$, *homogène, de degré* d *et sans facteurs carrés, il existe une constante* $c(\varepsilon, P)$ *telle que pour tout couple* (a, b) *d'entiers premiers entre eux, vérifiant* $P(a, b) \neq 0$ *on ait:*

$$\sup(|a|, |b|)^{d-2} \leqslant c(\varepsilon, P)\, r(P(a, b))^{1+\varepsilon}.$$

3.5. LA CONJECTURE D'ERDŐS-WOODS

La conjecture suivante a été formulée par P. Erdős, puis par Woods en 1981.

CONJECTURE 3.5.1. (Erdős-Woods). *Il existe une constante* $k > 0$ *telle que pour tous les entiers positifs* x *et* y, *si* $r(x+i) = r(y+i)$ *pour tout* i, $i = 1, 2, \ldots, k$, *alors* $x = y$.

Cette conjecture est fausse pour $k = 2$ ($x = 2^n - 3$, $y = 2^{2n} - 2^{n+1} - 1$ conviennent). Par contre pour $k \geqslant 3$, aucun exemple d'entiers différents vérifiant les égalités de la conjecture d'Erdős-Woods n'est connu. M. Langevin a montré le résultat suivant (voir [11, 12]).

PROPOSITION 3.5.2. (Langevin). *La conjecture* abc *implique que la conjecture d'Erdős-Woods est vraie avec* $k = 3$, *sauf peut-être pour un nombre fini d'exceptions pour* x *et* y.

3.6. LA CONJECTURE DE HALL

En 1971, M. Hall Jr. a énoncé la conjecture suivante [7]:

CONJECTURE 3.6.1. (Hall). *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tous entiers* $x > 1$ *et* $y > 0$ *vérifiant* $x^3 \neq y^2$ *on ait:*

$$|x^3 - y^2| \geqslant c \max(x^3, y^2)^{1/6} .$$

On sait par exemple depuis 1738 (Euler), que les seules solutions non triviales de l'équation $|x^3 - y^2| = 1$ sont $(x, y) = (2, \pm 3)$. La relation $28187351^3 - 149651610621^2 = -1090$, montre que dans la conjecture de Hall, la constante c vérifie $c \leqslant 0,205305$. La conjecture abc n'admet pour conséquence que la forme faible suivante de la conjecture de Hall (voir [17], [25]).

CONJECTURE 3.6.2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $c(\varepsilon) > 0$ *telle que pour tous les entiers* $x > 1$ *et* $y > 0$ *on ait:*

$$|x^3 - y^2| \geqslant c(\varepsilon) \max(x^3, y^2)^{1/6 - \varepsilon} .$$

3.7. L'ÉQUATION DE FERMAT GÉNÉRALISÉE

La conjecture abc s'applique particulièrement aux équations diophantiennes à trois termes, dont l'équation de Fermat généralisée.

THÉORÈME 3.7.1. *Si la conjecture* abc *est vraie et si* A, B, C *sont des entiers strictement positifs, alors l'équation:*

$$Ax^l + By^m = Cz^n$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs x, y, z, l, m, n *vérifiant* $l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1$ *et* $(x, y, z) = 1$.

Preuve. Si $z = 1$, alors le théorème est clair, même sans admettre la conjecture abc. Supposons donc que $z \geqslant 2$ et que $(x, y, z) = 1$. Soit $d = (Ax^l, By^m, Cz^n)$. Alors d est borné. En appliquant la conjecture abc au triplet $(Ax^l/d, By^m/d, Cz^n/d)$, on obtient:

$$Cz^n/d \leqslant c_1(\varepsilon) \left(r(ABCx^l y^m z^n/d^3)\right)^{1+\varepsilon} ,$$

d'où l'on tire:

$$z^n \leqslant c_2(\varepsilon, C)\left(dr\left(\frac{ABCx^l y^m z^n}{d^3}\right)\right)^{1+\varepsilon} \leqslant c_3(\varepsilon, A, B, C)\,(xyz)^{1+\varepsilon}\,.$$

Puisque $Ax^l < Cz^n$ et $By^m < Cz^n$, alors $x < c_4(A, C)z^{n/l}$ et $y < c_5(B, C)z^{n/m}$. Ainsi

$$z^n \leqslant c_6(\varepsilon, A, B, C)\,(z^n)^{(1+\varepsilon)(l^{-1}+m^{-1}+n^{-1})}\,,$$

ce qui donne:

$$(z^n)^{1-(1+\varepsilon)(l^{-1}+m^{-1}+n^{-1})} \leqslant c_6(\varepsilon, A, B, C)\,.$$

Si $l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1$ et si ε est assez petit, alors $1 - (1 + \varepsilon)\,(l^{-1} + m^{-1} + n^{-1}) > 0$ et donc z^n est borné. Ainsi z, x, y, l, m, n sont bornés. □

REMARQUE 3.7.2. On peut trouver d'autres démonstrations de cette proposition dans [25] et [33]. Dans le cas $A = B = C = 1$, seules 10 solutions sont connues avec $l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1$:

$$1 + 2^3 = 3^2,\quad 13^2 + 7^3 = 2^9,\quad 17^3 + 2^7 = 71^2,$$
$$2^5 + 7^2 = 3^4,\quad 3^5 + 11^4 = 2^2.61^2,$$

ainsi que les solutions suivantes, découvertes par Beukers et Zagier (voir [3]):

$$17^7 + 76271^3 = 21063928^2,\quad 1414^3 + 2213459^2 = 65^7,$$
$$9262^3 + 15312283^2 = 113^7,\quad 43^8 + 96222^3 = 30042907^2,$$
$$33^8 + 1549034^2 = 15613^3\,.$$

3.8. QUELQUES CONJECTURES SUR LES NOMBRES PUISSANTS

DÉFINITION 3.8.1. *Un entier n est un nombre puissant s'il possède la propriété suivante: si p divise n et si p est premier, alors p^2 divise n.*

Si n est un nombre puissant, alors il s'écrit de façon unique sous la forme $n = a^2 b^3$, où b est sans facteurs carrés et son radical $r(n)$ vérifie donc $r(n) \leqslant n^{1/2}$.

Les conjectures citées dans cette partie proviennent de [22] et de [6] (B16).

CONJECTURE 3.8.2. (Erdős-Mollin-Walsh). *Il n'y a aucun triplet de nombres puissants consécutifs.*

Cette conjecture est vérifiée pour tous les triplets d'entiers inférieurs à 2^{60} [18] et implique en particulier qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que

Ceci fait apparaître un lien avec le premier cas du théorème de Fermat (voir [22]).

La conjecture *abc* ne permet pas de répondre totalement à la conjecture 3.8.2, mais permet d'avoir ceci (voir [17]):

PROPOSITION 3.8.3. *La conjecture abc implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets de nombres puissants consécutifs.*

Les conjectures suivantes concernent les nombres de Fermat et de Mersenne et il est facile de montrer qu'elles sont des conséquences de la conjecture *abc* ([17]).

CONJECTURE 3.8.4. *Pour tout entier* $k \geqslant 2$, *soit* n_k *le nombre puissant le plus proche de* 2^k *avec* $n_k \neq 2^k$. *Alors* $\lim_{k \to \infty} |2^k - n_k| = +\infty$.

CONJECTURE 3.8.5. *Il existe une infinité de nombres de Fermat et de Mersenne qui ne sont pas des nombres puissants.*

Pour terminer cette partie, citons la conjecture suivante sur les nombres *4-puissants,* qui sont des entiers n tels que $r(n)^4 \mid n$ (voir problème B16 de [6], édition 1981). Cette conjecture est aussi une conséquence de la conjecture *abc*.

CONJECTURE 3.8.6. (Erdős). *L'équation* $x + y = z$ *n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs 4-puissants, premiers entre eux.*

3.9. LA CONJECTURE DE RICHARD

La conjecture suivante est tirée de [23]:

CONJECTURE 3.9.1. (Richard). *Si deux entiers* x *et* y *vérifient pour tout entier* $n \geqslant 0$:

$$r(x^{2^n} - 1) = r(y^{2^n} - 1) ,$$

alors ils sont égaux.

A. Schinzel a montré de façon élégante que cette conjecture est une conséquence de la conjecture *abc* (voir [17], [23]).

3.10. LE PROBLÈME DE CROFT

Le problème de savoir dans quelle mesure la différence $|n! - 2^m|$ peut être petite par rapport à 2^m s'appelle le problème de Croft (voir [6], F23). Des résultats expérimentaux nous ont motivé pour proposer la conjecture suivante (voir [17]).

CONJECTURE 3.10.1. *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tous les entiers* m *et* n *avec* $(m, n) \neq (0, 0), (1, 0), (2, 1)$ *on ait:*

$$n \leqslant c(r(|n! - 2^m|))^{1/n} .$$

La conjecture abc implique cependant une forme faible de cette conjecture (voir [17]).

PROPOSITION 3.10.2. *La conjecture* abc *implique que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $c(\varepsilon) > 0$ *telle que pour tous les entiers* m *et* n *avec* $(m, n) \neq (0, 0), (1, 0), (2, 1)$, *on ait:*

$$n \leqslant c(\varepsilon)\,(r(|n! - 2^m|))^{(1+\varepsilon)/n} .$$

3.11. AUTRES CONSÉQUENCES

Nous regroupons dans cette partie plusieurs conséquences de la conjecture abc. Cela concerne en particulier des équations diophantiennes liées à des problèmes ouverts.

PROPOSITION 3.11.1. *Soient* $A > 0, B > 0$ *et* k *des entiers. La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$Ax^m - By^n = k$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > 1, y > 1, m > 1, n > 1$ *avec* $mn > 4$.

Cette proposition est liée à une conjecture de Pillai. Lorsque $A = 1, B = 1$ et $k = 1$, cette conjecture porte le nom de conjecture de Catalan, qui affirme en plus que $(x, y, m, n) = (3, 2, 2, 3)$ est l'unique solution. En 1976, R. Tijdeman [32] a montré que l'équation de Catalan n'admet qu'un nombre fini de solutions.

PROPOSITION 3.11.2. *La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$\left(\frac{x}{v}\right)^m - \left(\frac{y}{w}\right)^n = 1$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs $v, w, x, y, m > 1$ *et* $n > 1$ *vérifiant* $(x, v) = 1, (y, w) = 1$ *et* $mn > 4$.

Cette proposition est liée à une conjecture de Shorey et Tijdeman (voir [26], p. 202). Cette conjecture est vraie en particulier si l'une des variables v, w, x ou y est composée de nombres premiers fixés.

PROPOSITION 3.11.3. *La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$(x!)^n + 1 = y^m$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > 0$, $y > 0$, $n \geqslant 1$ *et* $m \geqslant 2$.

Cette proposition est liée à un problème de Brocard (voir [6], D25) et sa démonstration (voir [17] et [21]) est basée sur l'utilisation des inégalités suivantes, déduites des formules de Stirling et de Chebyshev (voir [19], p. 374), valables pour $x \geqslant 2$:

$$\text{(3.11.4)} \qquad \begin{cases} (x/e)^x < x!, \\ \prod_{p \leqslant x} p < 4^x, \ p \text{ premier} . \end{cases}$$

PROPOSITION 3.11.5. *La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$n! + 1 = p_k^a p_{k+1}^b$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers $n \geqslant 1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *et* $p_{k-1} \leqslant n < p_k$ *où* (p_i), $i \geqslant 1$ *est la suite des nombres premiers.*

Cette proposition est liée à une conjecture d'Erdős-Stewart (voir [6], A2). Sa démonstration est basée aussi sur les inégalités (3.11.4).

PROPOSITION 3.11.6. *La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$x^n + y^n = n!z^n$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ *et* $n \geqslant 4$.

Cette proposition est liée à un problème ouvert sur les équations diophantiennes (voir [6], D2).

PROPOSITION 3.11.7. *La conjecture* abc *implique que pour tout entier* $a \geqslant 1$, *l'équation*

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = az^m$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > y > 0$, $z > 0$, $n > 3$, $m > 1$ *avec* $(x, y) = 1, 3n^{-1} + m^{-1} < 1$.

Cette proposition est une réponse générale à un problème de H. Edgar ([6], D10) et de Shorey-Tijdeman ([26], pp. 202, 203).

PROPOSITION 3.11.8. *La conjecture* abc *implique que l'équation*

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > y > 1$ *et* $m > n > 3$.

La recherche de solutions pour l'équation ci-dessus est appelée problème de Goormaghtigh (voir [6], B25). Avec $n = 3, (x, y, m, n) = (2, 5, 5, 3)$, $(2, 90, 13, 3)$ sont les seules solutions connues.

PROPOSITION 3.11.9. *La conjecture* abc *implique que pour tout entier* $d \geqslant 1$, *l'équation*

$$x(x + d) \dots (x + kd) = y^n$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers $x > 0$, $k \geqslant 2$, $y > 0$ *et* $n \geqslant 2$.

Cette proposition montre le lien entre la conjecture abc et les progressions arithmétiques. P. Erdős et J.L. Selfridge ont montré en 1975 que l'équation ci-dessus n'a pas de solution dans le cas particulier $d = 1$ (voir [33] pour plus de détails).

4. A LA RECHERCHE DE FORMES EFFECTIVES

Soient a, b et c trois entiers positifs, premiers entre eux et vérifiant $a + b = c$. Soit $r = r(abc)$, le radical de abc. On définit le rapport de Oesterlé-Masser pour le triplet (a, b, c) par:

$$\alpha = \alpha(a, b, c) = \frac{\log c}{\log r}.$$

On définit de même le rapport de Szpiro pour le même triplet par:

$$\rho = \rho(a, b, c) = \frac{\log abc}{\log r}.$$

Ce dernier rapport est lié à la conjecture de Szpiro (voir conjecture 3.1.1) par les courbes elliptiques $E_{a,b,c}$ que Y. Hellegouarch [9] a mis au point en 1972 pour étudier le théorème de Fermat. C'est en utilisant ces mêmes courbes que K. Ribet a établit le lien entre la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil et le théorème de Fermat. Pour un triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$, la courbe $E_{a,b,c}$ est définie par:

$$E_{a,b,c}\colon\ y^2 = x(x - a)(x + b).$$