4.2 Two Dimensions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4.2 Two Dimensions

PROPOSITION 10 (Lott, Dodziuk). *The answer to the zero-in-the-spectrum question is "yes" if M is a two-dimensional manifold.*

Proof. The Hodge decomposition gives

$$\Lambda^0(M) = \operatorname{Ker}(\triangle_0) \oplus \Lambda^0(M)/\operatorname{Ker}(d), \tag{4.4}$$

$$\Lambda^1(M) = \operatorname{Ker}(\triangle_1) \oplus \overline{d\Lambda^0(M)} \oplus \overline{*d\Lambda^0(M)}, \tag{4.5}$$

$$\Lambda^2(M) = *\operatorname{Ker}(\triangle_0) \oplus *\big(\Lambda^0(M)/\operatorname{Ker}(d)\big). \tag{4.6}$$

Thus it is enough to look at

$$\operatorname{Ker}(\triangle_0), \quad \operatorname{Ker}(\triangle_1) \quad \text{and} \quad \sigma\left(\triangle_0 \text{ on } \Lambda^0(M)/\operatorname{Ker}(d)\right).$$

We argue by contradiction. Assume that zero is not in the spectrum. By Proposition 4, $\operatorname{Im}\big(\mathrm{H}^1_c(M) \to \mathrm{H}^1(M)\big) = 0$. Thus M must be planar, in the sense of either of the following two equivalent conditions:

1. Any simple closed curve in M separates it into two pieces.
2. M is diffeomorphic to the complement of a closed subset of S^2.

As $\operatorname{Ker}(\triangle_0) = 0$, M cannot be S^2. By Proposition 5, the possible existence of nonzero square-integrable harmonic 1-forms on M only depends on the underlying Riemann surface coming from the Riemannian metric on M.

We recall some notions from Riemann surface theory [1]. A function $f \in C^\infty(M)$ is *superharmonic* if $\triangle_0 f > 0$. (This is a conformally-invariant statement.) The Riemann surface underlying M is *hyperbolic* if it has a positive superharmonic function and *parabolic* otherwise. If M is planar and hyperbolic then there is a nonconstant harmonic function $f \in C^\infty(M)$ such that $\int_M df \wedge *df < \infty$ [1, p. 208]. Then df would be a nonzero element of $\operatorname{Ker}(\triangle_1)$. Thus M must be parabolic.

Put $\lambda_0 = \inf\big(\sigma(\triangle_0)\big)$. Choose some λ such that $0 < \lambda < \lambda_0$. Then there is a positive $f \in C^\infty(M)$ (not square-integrable!) such that $\triangle_0 f = \lambda f$ [31, Theorem 2.1]. However, this contradicts the parabolicity of M. $\square$

We do not know of any result analogous to Proposition 10 for general two-dimensional simplicial complexes, say uniformly finite. See, however, Subsection 5.2.