2. Propriétés arithmétiques de $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

la fonction f sur ces ensembles de diviseurs de n. Certains des résultats établis dans cette section donnent d'ailleurs lieu à plusieurs identités surprenantes.

Les auteurs remercient le rapporteur dont les nombreuses suggestions leur ont été utiles pour la version définitive de ce travail.

2. Propriétés arithmétiques de $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

On définit sur $\mathbf{F}$ les opérateurs $\bar{T}$, $\hat{T}$ et $\tilde{T}$ par $\bar{T}(f) := \bar{f}$, $\hat{T}(f) := \hat{f}$ et $\tilde{T}(f) := \tilde{f}$.

Du prochain résultat, il découle en particulier que toute fonction arithmétique est elle-même la «moyenne» d'une autre fonction arithmétique.

Théorème 2.1. *L'opérateur $\bar{T}$ établit une bijection de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{F}$. Il en est de même pour l'opérateur $\tilde{T}$.*

Démonstration. Pour chaque $f \in \mathbf{F}$,

$$\bar{T}(f) = \bar{f} = \frac{1}{\tau}(1 * f) \quad \text{si et seulement si } f = \mu * \tau \bar{f}$$

$$\text{et} \quad \tilde{T}(f) = \tilde{f} = \frac{1}{2^{\omega}}(1 *_u f) \quad \text{si et seulement si } f = (-1)^{\omega} *_u 2^{\omega} \tilde{f},$$

d'où le résultat.

Exemples. Ainsi il est intéressant de se demander quelles sont les images par l'opérateur $\bar{T}^{-1}$ ou par l'opérateur $\tilde{T}^{-1}$ de certaines fonctions arithmétiques classiques, soit par exemple les fonctions ω, Λ, $\lambda(n)$ et $E(n)$. On vérifie successivement que

$$\omega(n) = \overline{(\omega + k)}(n), \text{ où } k(n) = \sum_{p \| n} 1,$$

$$\Lambda(n) = \tilde{g}(n), \quad \text{où } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{\omega(n)} \sum_{p \mid n} \log \frac{1}{p^2} & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

$$\lambda(n) = \overline{\lambda(n)\tau(n^2)},$$

$$E(n) = \bar{\mu}(n) = \hat{\mu}(n).$$

L'opérateur $\hat{T}$ n'est pas injectif. En effet, si on pose $g_1(n) = \tau(n)/n$, $g_2(n) = 2^{\omega(n)}/n$ et $g_3(n) = 2^{\Omega(n)}/n$ alors

$$\hat{g}_1(n) = \hat{g}_2(n) = \hat{g}_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + 2/p)$$

$$= \frac{1}{\delta(n) 2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + \sigma(p)) = \frac{\hat{\sigma}(n)}{\delta(n)}.$$

Les opérateurs $\bar{T}$, $\hat{T}$ et $\tilde{T}$ préservent la multiplicativité et l'additivité. On a en effet le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Si f est dans $\mathscr{A}$ (respectivement dans $\mathscr{M}$), alors les fonctions $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ sont chacune dans $\mathscr{A}$ (respectivement dans $\mathscr{M}$).*

Avant de donner la démonstration du théorème, voyons par des exemples les allures que prennent $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ pour des fonctions f additives et multiplicatives.

EXEMPLES

1) On démontre facilement avec le théorème 2.2 que

$$\tilde{\lambda}(n) = \bar{\lambda}(n)\tau(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

soit la fonction caractéristique de l'ensemble des carrés parfaits.

2) Parfois, il arrive que $\bar{f}(n) = \tilde{f}(n)$; ainsi on a

$$\bar{\tau}(n) = \tilde{\tau}(n) = \frac{\tau(n\delta(n))}{2^{\omega(n)}} = \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \alpha/2)$$

et

$$\bar{\Omega}(n) = \tilde{\Omega}(n) = \frac{\Omega(n)}{2}.$$

Démonstration du théorème 2.2. Si $f \in \mathscr{M}$, la démonstration est presque immédiate. Nous allons établir la preuve uniquement pour $\bar{f}$, dans le cas où $f \in \mathscr{A}$; les cas des fonctions $\hat{f}$ et $\tilde{f}$, avec $f \in \mathscr{A}$, sont presque identiques. Soit donc $f \in \mathscr{A}$ et soit n et m deux entiers positifs relativement premiers, alors

$$\begin{aligned}
\bar{f}(mn) &= \frac{1}{\tau(mn)} \sum_{d \mid mn} f(d) = \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} f(d_1 d_2) \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} (f(d_1) + f(d_2)) \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} f(d_1) + \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \mid m}} f(d_2) \\
&= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_1 \mid n} f(d_1) \sum_{d_2 \mid m} 1 + \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_2 \mid m} f(d_2) \sum_{d_1 \mid n} 1 \\
&= \bar{f}(n) + \bar{f}(m).
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré pour $\bar{f}$.

REMARQUE. La réciproque du théorème 2.2, comme nous l'avons montré dans l'introduction, est vraie pour $\bar{f}$ et pour $\tilde{f}$. Montrons par un exemple que ce n'est pas le cas de la fonction $\hat{f}$. Soit f la fonction définie par

$$f(n) = \begin{cases} 2^{\Omega(n)} & \text{si } p^2 \mid n, \\ \omega(n) & \text{sinon}. \end{cases}$$

Il est clair que f n'est pas additive; or il est facile de voir que $\hat{f}(n) = \hat{\omega}(n) = \frac{\omega(n)}{2} \in \mathscr{A}$, puisque $\hat{f}(n)$ est indépendante des valeurs de $f(d)$ où $d \mid n$ avec $\mu(d) = 0$. C'est pourquoi $\hat{f} \in \mathscr{A} \not\Rightarrow f \in \mathscr{A}$.

Il est intéressant de signaler qu'en général $\bar{f}(n) \neq f(n)$. En effet, il est facile de démontrer que, quelle que soit la fonction arithmétique f,

$$\bar{f}(n) = f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow f \equiv c, \text{ pour une certaine constante } c\,.$$

La même affirmation est valable dans le cas des fonctions $\hat{f}$ et $\tilde{f}$. Une observation plus générale sera faite à la section 5.

Par ailleurs, si $f \in \mathscr{A}$,

$$\bar{f}(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m),$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2} \sum_{p \mid n} f(p) = \frac{1}{2} f(\delta(n))$$

$$\text{et} \quad \tilde{f}(n) = \frac{1}{2} f(n)\,.$$

Si $f \in \mathscr{E}\mathscr{A}$, alors $\bar{f}(n) = \tilde{f}(n) = f(n)/2$. Mentionnons également que lorsque $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$,

$$\bar{f}(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} f(p) = f(n) - \sum_{p^\alpha \| n} \frac{1}{1 + \alpha} f(p)\,;$$

en particulier, si f est à valeurs positives, on a les inégalités $\frac{1}{2} f(n) \leqslant \bar{f}(n) < f(n)$, ce qui est équivalent à $\bar{f}(n) < f(n) \leqslant 2\bar{f}(n)$.

Par ailleurs si $f \in \mathscr{M}$, alors

$$\bar{f}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)\right),$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + f(p))$$

$$\text{et} \quad \tilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + f(p^\alpha))\,.$$

Lorsque $f \in \mathscr{F}\mathscr{M}$,

$$\bar{f}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + \alpha f(p))$$

$$\text{et} \quad \tilde{f}(n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + f(p)) .$$

Enfin si $f \in \mathscr{E}\mathscr{M}$, alors $\tilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha \| n} (1 + f(p)^\alpha)$.

Il découle donc de ces observations que $\bar{T}$ préserve le caractère totalement additif alors que $\hat{T}$ applique les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{M}$ respectivement sur $\mathscr{F}\mathscr{A}$ et sur $\mathscr{F}\mathscr{M}$. En particulier $\mathscr{F}\mathscr{A}$ et $\mathscr{F}\mathscr{M}$ sont des ensembles invariants par rapport à l'opérateur $\hat{T}$ en ce sens que pour chaque $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, $\hat{T}(f) \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, et que pour chaque $f \in \mathscr{F}\mathscr{M}$, $\hat{T}(f) \in \mathscr{F}\mathscr{M}$. Par ailleurs, l'opérateur $\tilde{T}$ préserve les caractères totalement additif, fortement additif et fortement multiplicatif des fonctions arithmétiques qui ont ces propriétés avec la particularité que $\tilde{T} = \hat{T}$ sur $\mathscr{F}\mathscr{A}$ ainsi que sur $\mathscr{F}\mathscr{M}$.

Le prochain résultat précise que si $f \in \mathscr{M}$ alors $f(\delta(n))$ est le quotient de deux fonctions chacune d'elles étant une moyenne sur les diviseurs libres de carrés.

THÉORÈME 2.3. *Soit* $f \in \mathscr{M}$ *telle que* $f(n) \neq 0$, $\forall n \geqslant 1$ *et posons* $g = 1/f$, *alors*

$$\hat{f}(n) = f(\delta(n))\hat{g}(n) . \tag{2.1}$$

Sous les mêmes hypothèses, on obtient l'équivalent de (2.1) pour $\tilde{f}$ *à savoir*

$$\tilde{f}(n) = f(n)\tilde{g}(n) .$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{M}$ telle que $f(n) \neq 0$, $\forall n \geqslant 1$, alors avec la notation $g = 1/f$, on obtient

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} (1 + f(p)) = \frac{f(\delta(n))}{2^{\omega(n)}} \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{f(p)}\right)$$

$$= \frac{f(\delta(n))}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) g(d) = f(\delta(n))\hat{g}(n) .$$

EXEMPLE. Si on pose $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ alors $g(n) = \frac{n}{\phi(n)}$ et $\hat{f}(n) = \frac{\phi(n)}{n}\hat{g}(n)$ suit immédiatement de (2.1). Comme ici $f(n) = \frac{\phi(n)}{n} \in \mathscr{F}\mathscr{M}$, on a également $\tilde{f}(n) = f(n)\tilde{g}(n)$.

REMARQUE. Vu que si $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ alors $\tilde{f}(n) = f(n)\frac{\tilde{1}}{f}(n)$ et comme l'opérateur $\tilde{T}$ est bijectif, il existe une fonction $h \in \mathscr{M}$ telle que $\tilde{h}(n) = 1/\left(\frac{\tilde{1}}{f}\right)(n)$. On établit facilement (par la formule d'inversion sur les diviseurs unitaires mentionnée ci-dessus) que $h(n) = \prod_{p \mid n}(1 - 2/2p - 1))$. C'est donc dire que $\frac{\phi(n)}{n}$ s'écrit comme le produit de deux moyennes sur les diviseurs unitaires, puisque, dans ce cas, $\frac{\phi(n)}{n} = \tilde{f}(n)\tilde{h}(n)$. De façon générale, grâce à la bijectivité de $\tilde{T}$, on peut exprimer toute fonction $f \in \mathscr{M}$ comme produit de deux moyennes sur les diviseurs unitaires, l'une d'elles étant $\tilde{f}$.

Désignons maintenant par $\circ$ l'opérateur classique de composition des applications. On peut facilement vérifier que $(\bar{T} \circ \tilde{T})(\mu) = (\tilde{T} \circ \bar{T})(\mu)$. Ce constat n'est pas exclusif à la fonction μ, comme l'indique le résultat suivant.

THÉORÈME 2.4. *Soit* $g \in \mathscr{A} \cup \mathscr{M}$, *alors* $(\bar{T} \circ \tilde{T})(g) = (\tilde{T} \circ \bar{T})(g)$, *i.e.* $\bar{\tilde{g}} = \tilde{\bar{g}}$. *En particulier* $\bar{T}$ *et* $\tilde{T}$ *commutent sur l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions* $g \in \mathscr{A} \cup \mathscr{M}$.

Démonstration. Nous allons maintenant établir la preuve dans le cas $g \in \mathscr{M}$. Le cas $g \in \mathscr{A}$ se traite de manière analogue et utilise le fait que les opérateurs $\bar{T}$ et $\tilde{T}$ sont linéaires. Soit donc $g \in \mathscr{M}$, alors $\bar{T}(g) = \bar{g} \in \mathscr{M}$ et $\tilde{T}(g) = \tilde{g} \in \mathscr{M}$, avec

$$\bar{T}(g)(p^\alpha) = \bar{g}(p^\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)$$

$$\text{et} \quad \tilde{T}(g)(p^\alpha = \tilde{g}(p^\alpha) = \frac{1}{2}(1 + g(p^\alpha))$$

d'où

$$(\tilde{T} \circ \bar{T})(g)(n) = \tilde{T}[\bar{T}(g)](n) = \tilde{T}(\bar{g})(n) = \prod_{p^\alpha \| n} \frac{1}{2}(1 + \bar{g}(p^\alpha))$$

$$= 2^{-\omega(n)} \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)\right) \tag{2.2}$$

$$= \frac{2^{-\omega(n)}}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \alpha + \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)\right).$$

D'autre part,

$$(\bar{T} \circ \tilde{T})(g)(n) = \bar{T}(\tilde{g})(n) = \prod_{p^\alpha \| n} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=0}^{\alpha} \tilde{g}(p^m) \right)$$

$$= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} \left(\sum_{m=0}^{\alpha} 2^{-1}(1 + g(p^m)) \right) \tag{2.3}$$

$$= \frac{2^{-\omega(n)}}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \alpha + \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m) \right).$$

L'égalité entre (2.2) et (2.3) équivaut à $\bar{\bar{g}} = \tilde{\tilde{g}}$. Et le théorème est démontré.

EXEMPLES

1) On a vu dans l'introduction que si $f(n) = 2^{\omega(n)}$ alors $\bar{f}(n) = \dfrac{\tau(n^2)}{\tau(n)}$, d'où

$$\bar{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \frac{\tau(p^{2\alpha})}{\tau(p^\alpha)} \right) = \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \frac{\alpha}{2(\alpha + 1)} \right).$$

D'autre part,

$$\tilde{f}(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(n)} \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{f}}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \frac{3}{2}\alpha \right) = \frac{\tau(n^3 \delta(n))}{2^{\omega(n)} \tau(n)}.$$

Or d'après le théorème 2.4 on a l'égalité $\bar{\bar{f}}(n) = \tilde{\tilde{f}}(n)$; donc en particulier

$$\frac{\tau(n^3 \delta(n))}{2^{\omega(n)} \tau(n)} = \prod_{p^\alpha \| n} \left(1 + \frac{\alpha}{2(\alpha + 1)} \right).$$

2) Comme

$$\tilde{\lambda}(n) = \bar{\lambda}(n)\tau(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

il suit du théorème 2.4 que

$$\bar{\bar{\lambda}}(n) = \tilde{\tilde{\lambda}}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ \alpha \text{ pair}}} \left(1 + \frac{1}{\alpha + 1} \right).$$