3. Valeurs moyennes de $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Valeurs moyennes de $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

Soit f une fonction arithmétique. S'il existe une fonction continue monotone g définie sur $[1, +\infty[$ et telle que $\sum_{n \leqslant x} f(n) \sim \sum_{n \leqslant x} g(n)$, lorsque $x \to \infty$, on dit que g est une *valeur moyenne* (ou un *ordre moyen*) de f.

On dit qu'une fonction mesurable $R: [2, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ est une fonction *à variation régulière* s'il existe un nombre réel $\rho \geqslant 0$ tel que pour chaque $a > 0$ on a $\lim_{x \to \infty} \dfrac{R(ax)}{R(x)} = a^\rho$. Compte tenu de la nature des applications considérées ci-dessous, nous n'étudions que les fonctions continûment dérivables à variation régulière. Si $\rho = 0$, on dit que R est *à oscillation lente*. Désignons par $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables à oscillation lente. On peut montrer (voir le livre de Seneta [7], p. 2) que toute fonction à variation régulière R peut s'écrire sous la forme $R(x) = x^\rho L(x)$, où $\rho \in \mathbf{R}$ et $L \in \mathscr{L}$. Il est démontré dans Seneta ([7], p. 7) que $L \in \mathscr{L}$ si et seulement si $\dfrac{xL'(x)}{L(x)} = o(1)$ lorsque $x \to \infty$. Nous utiliserons l'expression fonction régulière pour signifier fonction à variation régulière. Si la fonction g ci-dessus est régulière, on dit que la fonction arithmétique f possède une valeur moyenne régulière.

Voyons maintenant dans quel sens on pourra dire que la valeur moyenne régulière de f est unique. D'abord signalons que si f possède deux valeurs moyennes monotones régulières R et S alors R et S sont asymptotiquement équivalentes. En effet, soit $R(x) = x^{\rho_1} L_1(x)$ et $S(x) = x^{\rho_2} L_2(x)$ (où L_1 et L_2 sont deux fonctions à oscillation lente) telles que, lorsque $x \to \infty$,

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} f(n) \sim x^{-1} \sum_{n \leqslant x} R(n) \quad \text{et} \quad x^{-1} \sum_{n \leqslant x} f(n) \sim x^{-1} \sum_{n \leqslant x} S(n) .$$

On ne restreint pas la généralité en supposant $\rho_1, \rho_2 > -1$. On a alors $\sum_{n \leqslant x} n^{\rho_1} L_1(n) \sim \sum_{n \leqslant x} n^{\rho_2} L_2(n)$, et il s'ensuit que $\int_1^x t^{\rho_1} L_1(t)\,dt \sim \int_1^x t^{\rho_2} L_2(t)\,dt$. En utilisant un résultat classique dû à Karamata (voir Bingham, Goldie and Teugels [2], p. 26), on en déduit que

$$\frac{x^{\rho_1+1}}{\rho_1+1} L_1(x) \sim \frac{x^{\rho_2+1}}{\rho_2+1} L_2(x) \text{ et ainsi que } x^{\rho_1-\rho_2} \sim \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1} \frac{L_1(x)}{L_2(x)} .$$

Mais puisque L_1 et $L_2 \in \mathscr{L}$, il vient $\dfrac{\rho_1 + 1}{\rho_2 + 1} \dfrac{L_1(x)}{L_2(x)} = x^{o(1)}$, ce qui permet de conclure que $\rho_1 = \rho_2 + o(1)$ c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2$, ce qui implique $R(x) \sim S(x)$ lorsque $x \to \infty$.

Compte tenu de ces observations, on peut considérer que la valeur moyenne régulière, lorsqu'elle existe, d'une fonction arithmétique f est unique. Dans un tel cas, c'est donc sans ambiguïté qu'on désignera sa valeur moyenne régulière par $VM(f)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$. *Alors:*

(i) la fonction f *possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction* $\hat{f}$ *en possède une;*

(ii) la fonction f *possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction* $\tilde{f}$ *en possède une.*

De plus, si l'une ou l'autre de ces valeurs moyennes existe et est régulière, on a

$$VM(f) = 2VM(\hat{f}) = 2VM(\tilde{f}) . \tag{3.1}$$

Démonstration. Les parties (i) et (ii) ainsi que les égalités (3.1) découlent immédiatement du fait que $\hat{f} = \tilde{f} = \frac{1}{2}f$ pour toute fonction $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$.

THÉORÈME 3.2. *Soit* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$ *telle que* $f(p) = R(p)$ *pour chaque nombre premier* p, *où* R *est une fonction continûment dérivable à variation régulière non décroissante qui possède la représentation* $R(x) = x^\rho L(x)$, *avec* $\rho \geqslant 0$ *et* $L \in \mathscr{L}$. *Alors la valeur moyenne régulière de la fonction* f *existe si et seulement si celle de la fonction* $\bar{f}$ *existe, auquel cas*

$$VM(f) = 2VM(\bar{f}) . \tag{3.2}$$

Avant d'entreprendre la démonstration du théorème 3.2, nous établissons d'abord un lemme d'intérêt général qui s'avère crucial pour la démonstration de ce théorème.

LEMME 3.3. *Soit* $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ *une fonction continue non décroissante telle que* $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$. *Alors*

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt = o(\varphi(x)) .$$

Démonstration. Soit φ une fonction satisfaisant les hypothèses du lemme. Pour tout x assez grand, on pose

$$y(x) := \inf\{y : \varphi(y) = \sqrt{\varphi(x)}\}\,.$$

Il est clair que $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$.

Puisque φ est non décroissante on a

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt &= \int_1^{y(x)} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \int_{y(x)}^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \leqslant \varphi(y(x))\int_1^{y(x)} \frac{dt}{t^2} + \varphi(x)\int_{y(x)}^x \frac{dt}{t^2}\\ &= \varphi(y(x))\left(1 - \frac{1}{y(x)}\right) + \varphi(x)\left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right)\\ &\leqslant \sqrt{\varphi(x)}\left(1 - \frac{1}{y(x)}\right) + \varphi(x)\left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right)\\ &< \sqrt{\varphi(x)} + \frac{\varphi(x)}{y(x)} = o(\varphi(x))\,,\end{aligned}$$

car $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$, ce qui complète la preuve du lemme 3.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. D'abord, puisque $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, il est facile d'établir que

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{p\leqslant x} f(p)\left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p\leqslant x} R(p)\left[\frac{x}{p}\right]. \tag{3.3}$$

Par ailleurs, toujours parce que $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, on a

$$\bar{f}(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{1+\alpha} f(p) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{1+\alpha} R(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} \bar{f}(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{p^\alpha\|n} \frac{\alpha}{1+\alpha} R(p) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\alpha\mid n\\ \alpha\geqslant 1}} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) R(p)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\sum_{p\mid n} R(p) + \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\alpha\mid n\\ \alpha\geqslant 2}} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} R(p)\end{aligned}$$

et donc d'obtenir

$$\sum_{n\leqslant x} \bar{f}(n) = \frac{1}{2}\sum_{p\leqslant x} R(p)\left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}} \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} R(p)\left[\frac{x}{p^\alpha}\right]. \tag{3.4}$$

Considérons d'abord le cas où la fonction $R(x) = x^{\rho}L(x)$ est telle que $\rho = 0$. On a alors

$$(3.5)\qquad \sum_{p \leqslant x} R(p)\left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p \leqslant x} L(p)\left[\frac{x}{p}\right] = x \sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} + O\left(\sum_{p \leqslant x} L(p)\right).$$

Or, en utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(x) = \dfrac{x}{\log x} + O\left(\dfrac{x}{\log^2 x}\right)$, on a

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} = \int_2^x \frac{L(t)}{t}\, d\pi(t) = \frac{L(t)}{t}\pi(t)\Big|_2^x - \int_2^x \pi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L(t)}{t}\right) dt$$

$$(3.6)\qquad = \frac{L(x)}{\log x} + O\left(\frac{L(x)}{\log^2 x}\right) + (1 + o(1))\int_2^x \frac{t}{\log t}\frac{L(t)}{t^2}\left(1 - \frac{tL'(t)}{L(t)}\right) dt$$

$$= \frac{L(x)}{\log x} + O\left(\frac{L(x)}{\log^2 x}\right) + (1 + o(1))\int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}(1 - \eta(t))\, dt\,,$$

où $\eta(t) := \dfrac{tL'(t)}{L(t)} \to 0$ lorsque $t \to \infty$, puisque $L \in \mathscr{L}$. Or, étant donné une fonction $M \in \mathscr{L}$, il a été démontré par De Koninck et Mercier ([3], lemme 3) que

$$M(x) = o\left(\int_2^x \frac{M(t)}{t}\, dt\right).$$

En utilisant ce résultat avec $M(x) = \frac{L(x)}{\log x}$, (3.6) devient

$$(3.7)\qquad \sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} = (1 + o(1))\int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}\, dt\,.$$

Puisque le terme d'erreur $O\left(\sum_{p \leqslant x} L(p)\right)$ qui apparaît dans (3.5) est $o\left(x\displaystyle\int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}\, dt\right)$, la relation (3.3) devient

$$(3.8)\qquad \sum_{n \leqslant x} f(n) = (1 + o(1))xN(x)\,,$$

où $N(x) := \displaystyle\int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}\, dt.$

Par ailleurs il est clair que

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} L(p) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right] < x \sum_{\substack{p \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{L(p)}{p^\alpha} \ll x . \tag{3.9}$$

Enfin, puisque L est non décroissante, on a

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t}\, dt \geqslant L(2) \int_2^x \frac{dt}{t \log t}\, dt \\ &= L(2) \log\log x + O(1) \to +\infty \text{ lorsque } x \to \infty . \end{aligned}$$

En combinant alors (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) et (3.9), on obtient le résultat, incluant l'égalité (3.2), dans le cas où $R = L \in \mathscr{L}$.

Il reste à considérer le cas où $R(x) = x^\rho L(x)$, avec $\rho > 0$. Comme $x - 1 < [x] \leqslant x$, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left(\frac{x}{p} - 1\right) < \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{R(p)}{p} =: \psi(x)$$

et donc

$$\psi(x) - \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) < \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \psi(x) .$$

Or en utilisant les représentations

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{R(p)}{p} = \int_2^x \frac{R(t)}{t}\, d\pi(t) \quad \text{et} \quad \sum_{p \leqslant x} R(p) = \int_2^x R(t)\, d\pi(t)$$

et en utilisant le théorème des nombres premiers, tout comme on l'a fait dans le cas $R(p) = L(p)$ ci-dessus, on établit que, lorsque $x \to \infty$,

$$\psi(x) \sim \frac{x^\rho}{\rho} \frac{L(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) \sim \frac{x^\rho}{\rho+1} \frac{L(x)}{\log x} ,$$

de sorte que les trois quantités $\psi(x)$, $\frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p)$ et $\psi(x) - \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p)$ sont du même ordre de grandeur. Ainsi, compte tenu des relations (3.3) et (3.4), la démonstration sera terminée si l'on peut démontrer que le deuxième terme à droite de (3.4) est $o(x\psi(x))$. Le résultat sera donc démontré si l'on arrive à établir l'implication générale suivante:

$$\begin{aligned} &T(n) \geqslant 0, \quad \varphi(x) \to +\infty, \quad S(x) := \sum_{n \leqslant x} T(n) \sim \varphi(x) \\ &\Rightarrow \sum_{n \leqslant x} \frac{T(n)}{n} = o(\varphi(x)) . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Or cette dernière somme peut s'écrire comme suit:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{T(n)}{n} = \sum_{n \leqslant x} \frac{S(n) - S(n-1)}{n} = \sum_{n \leqslant x} S(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{S([x])}{[x]+1}$$

(3.11)

$$= \sum_{n \leqslant x} \frac{S(n)}{n(n+1)} + o(\varphi(x)) \sim \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + o(\varphi(x)) .$$

Ainsi compte tenu de (3.11), l'implication (3.10) est une conséquence immédiate du lemme 3.3. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.

R. L. Duncan a montré (voir [4]) qu'en moyenne, la moyenne de ω sur les diviseurs de n est égale à $\frac{1}{2}\log\log n$. Plus précisément Duncan a démontré qu'il existe une constante c telle que

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \left(\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \omega(d)\right) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{\omega}(n) = \frac{1}{2} \log\log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right) .$$

A cette fin, Duncan a utilisé la relation asymptotique bien connue

(3.12)

$$\sum_{n \leqslant x} \omega(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{p \mid n} 1 = \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] = x \log\log x + Cx + O(x/\log x) ,$$

où $C := \gamma + \sum_p \left(\log(1 - p^{-1}) + \frac{1}{p}\right)$ et γ est la constante d'Euler. Bien plus encore, Duncan a établi l'égalité des ordres normal et moyen de $\bar{\omega}(n)$.

Etant donné $f \in \mathbf{F}$, il est naturel d'examiner le comportement de la suite $\bar{f}, \bar{\bar{f}}, \bar{\bar{\bar{f}}}, \ldots$ Ainsi, pour un entier non négatif m fixé, on considère l'itération $\bar{T}_m$ définie par

$$\bar{T}_m(f) = \bar{T}(\bar{T}_{m-1}(f)) = \ldots = \bar{T}_{m-1}(\overline{T_1}(f)) = \bar{T}_{m-1}(\bar{f})$$

où $\bar{T}_1 = \bar{T}$, $\bar{T}_0(f) = f$, et où

$$(\bar{T}_m(f))(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} (\bar{T}_{m-1}(f))(d), n \geqslant 1 .$$

Pour simplifier la notation, on désigne par $\bar{f}_m$ l'image de f par $\bar{T}_m$, i.e. $\bar{T}_m(f) = \bar{f}_m$. Nous définissons de même les itérations $\hat{f}_m$ et $\tilde{f}_m$ et obtenons alors par induction sur m, compte tenu des propriétés de $\bar{T}$, $\hat{T}$ et $\tilde{T}$, l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.4. *Soit m un entier non négatif et f une fonction arithmétique. Alors $\bar{T}_m$, $\hat{T}_m$ et $\tilde{T}_m$ préservent l'additivité et la multi-*

plicativité. En particulier si $f \in \mathscr{A}$ *alors* $\tilde{f}_m(n) = f(n)/2^m$ *et* $\hat{f}_m(n) = f(\delta(n))/2^m$. *Lorsque* $f \in \mathscr{E}\mathscr{A}$, $\bar{f}_m(n) = \tilde{f}_m(n) = f(n)/2^m$. *Enfin si* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, $\hat{f}_m(n) = \tilde{f}_m(n) = f(n)/2^m = f(\delta(n))/2^m$.

Afin de généraliser le résultat de Duncan, nous aurons besoin du lemme suivant qui est facile à démontrer.

LEMME 3.5. *Soit* $f \in \mathscr{A}$. *Supposons que* f *est constante sur l'ensemble* $\mathscr{P}$ *des nombres premiers et qu'elle satisfait à* $f(p^r) - f(p^{r-1}) = O(1)$ *uniformément pour* p *premier et* $r \geqslant 2$. *Alors les expressions* $\bar{f}_m(p^r) - \bar{f}_m(p^{r-1})$, $\hat{f}_m(p^r) - \hat{f}_m(p^{r-1})$ *et* $\tilde{f}_m(p^r) - \tilde{f}_m(p^{r-1})$ *sont également bornées uniformément pour* p *premier et* $r \geqslant 2$. *De plus les fonctions* $\bar{f}_m, \hat{f}_m$ *et* $\tilde{f}_m$ *sont constantes sur* $\mathscr{P}$.

A chaque fonction g constante sur $\mathscr{P}$, on associe les constantes suivantes

$$c_g := g(2) \quad \text{et} \quad D_g := c_g C + \sum_{r \geqslant 2} \sum_{p} \frac{g(p^r) - g(p^{r-1})}{p^r},$$

où C est la constante de la relation (3.12).

THÉORÈME 3.6. *Soit* f *une fonction additive satisfaisant les hypothèses du lemme 3.5. Alors*

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} \log\log x + D_{\bar{f}_m} + O(1/\log x),$$

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \hat{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \omega(n) = \frac{c_f}{2^m} \log\log x + \frac{c_f}{2^m} C + O(1/\log x),$$

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \tilde{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} \log\log x + \frac{D_f}{2^m} + O(1/\log x).$$

Démonstration. Si $g \in \mathscr{A}$ et est constante sur $\mathscr{P}$, on a

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} g(n) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \sum_{p^r \| n} g(p^r) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{p^r | n \\ r \geqslant 1}} (g(p^r) - g(p^{r-1}))$$

$$= x^{-1} c_g \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] + x^{-1} \sum_{\substack{p^r \leqslant x \\ r \geqslant 2}} (g(p^r) - g(p^{r-1})) \left[\frac{x}{p^r}\right].$$

Alors la relation (3.12) et le lemme 3.5 permettent d'obtenir les égalités du théorème si on prend soin de remplacer successivement g par $\bar{f}_m$, $\hat{f}_m$ et $\tilde{f}_m$.

EXEMPLE. Si $f(n) = \log \tau(n)$ et $m = 1$, alors

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{f}(n) = \frac{\log 2}{2} \log\log x + \frac{\log 2}{2} C$$
$$+ \sum_{r \geqslant 2} \sum_{p} \frac{1}{r(r+1)p^r} \log \left(\frac{(r+1)^r}{r!} \right) + O(1/\log x) .$$

4. MESURE DE L'ÉCART ENTRE f ET LES MOYENNES $\bar{f}$, $\hat{f}$ ET $\tilde{f}$

Nous allons étudier le moment d'ordre deux (selon le sens des définitions des moyennes $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$) de l'écart entre $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$ et les valeurs de f sur les diviseurs de n.

Etant donné une fonction arithmétique f, on lui associe les trois opérateurs

$$\bar{\Delta} f(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} (f(d) - \bar{f}(n))^2 ,$$

$$\hat{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) \, (f(d) - \hat{f}(n))^2 ,$$

$$\tilde{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} (f(d) - \tilde{f}(n))^2 .$$

Ainsi on remarque que

$$\bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \{ f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\bar{f}(n) f(d) \}$$
$$= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2 \frac{\bar{f}(n)}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)$$
$$= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2$$

et donc que

$$\bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 = \overline{f^2}(n) - \bar{f}(n)^2 , \tag{4.1}$$

$$\hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) f(d)^2 - \hat{f}(n)^2 = \widehat{f^2}(n) - \hat{f}(n)^2 , \tag{4.2}$$

$$\tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)^2 - \tilde{f}(n)^2 = \widetilde{f^2}(n) - \tilde{f}(n)^2 . \tag{4.3}$$