EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan

Autor(en): **Mathéus, Frédéric**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-87874

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 42 (1996), p. 125-152

EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan

par Frédéric MATHÉUS

I. INTRODUCTION

Répondant à une question posée par W. Thurston en 1985 (voir [Th2]), Burt Rodin et Dennis Sullivan ([R-S]) ont montré comment les empilements de cercles permettaient de construire des approximations quasi-conformes de l'uniformisation de Riemann d'un ouvert simplement connexe borné de $\mathbf{C}$. Leur méthode repose sur un résultat de rigidité, la rigidité de l'empilement hexagonal standard (voir [R-S]) dont la preuve a été simplifiée par B. Rodin et Z. X. He (voir [R]).

Dans [CV-M], nous utilisons, avec Yves Colin de Verdière, les empilements de cercles pour construire une méthode générale d'approximation, sur un compact, des fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas. Le but de ce travail est de comprendre comment les idées développées dans [CV-M] permettent de retrouver le théorème d'approximation de Rodin-Sullivan grâce à une estimation quantitative du comportement asymptotique des rayons énoncée à la fin de la section II.

En particulier, une méthode d'homotopie analogue à celle développée dans [CV-M] permet d'étendre simplement le lemme de Schwarz-Pick aux empilements immergés dans le plan hyperbolique (section III), lemme qui est essentiel pour obtenir un contrôle *a priori* des rayons (section IV). Quant aux fonctions harmoniques positives qui apparaissent naturellement, elles vérifient une version discrète de l'inégalité de Harnack (section VI) que nous établissons par voie probabiliste, et qui donne l'estimation des rayons cherchée.

II. Le Théorème de Rodin-Sullivan: énoncé et schéma de la preuve

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert simplement connexe borné de $\mathbf{C}$ et z_0, z_1 deux points de $\mathcal{U}$. Notons $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathbf{C})$ la triangulation de $\mathbf{C}$ par des triangles équilatéraux de côté 2ε dont l'ensemble des sommets est $z_0 + 2\varepsilon\mathbf{Z} + 2\varepsilon e^{i\pi/3}\mathbf{Z}$, et $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U})$ l'ensemble des triangles de $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathbf{C})$ contenus dans $\mathcal{U}$. Notons $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ la composante connexe de la triangulation $\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U})$ contenant z_0. Si $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ est disconnectée par la suppression de certains sommets, on supprime toutes les composantes ne contenant pas z_0 ainsi obtenues. La sous-triangulation de $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ fournie par ce procédé[1]), notée $\mathcal{T}_\varepsilon$, est une triangulation d'un disque topologique. On note $\mathcal{H}_\varepsilon$ l'ensemble des cercles du plan de rayon ε et centrés sur les sommets de $\mathcal{T}_\varepsilon$. On observera que les cercles de $\mathcal{H}_\varepsilon$ ne sont pas forcément contenus dans $\mathcal{U}$.

Koebe ([Ko]) puis Andreev ([An]) et Thurston ([Th1], [Ma-R]) ont démontré qu'il existe alors une famille $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ de cercles bordant des disques d'intérieurs deux à deux disjoints, contenus dans le disque unité $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$, et vérifiant:

i) $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ est en bijection avec $\mathcal{H}_\varepsilon$;

ii) deux cercles de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ sont tangents si et seulement si les cercles correspondants dans $\mathcal{H}_\varepsilon$ le sont;

iii) les cercles de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ correspondants aux cercles du bord de $\mathcal{H}_\varepsilon$ sont tangents au cercle unité.

Une telle famille (cf. fig. 1) s'appelle un empilement de cercles d'Andreev de combinatoire $\mathcal{T}_\varepsilon^1$ où $\mathcal{T}_\varepsilon^1$ désigne le 1-squelette de $\mathcal{T}_\varepsilon$. Elle est unique à transformation de Möbius près. Elle sera donc parfaitement déterminée si on demande que soit vérifiée une condition de normalisation que nous formulons ci-après.

Soit f_ε l'application définie de la manière suivante:

— si z est le centre d'un cercle de $\mathcal{H}_\varepsilon$, alors $f_\varepsilon(z)$ est le centre du cercle correspondant de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$;

— on prolonge f_ε à chaque triangle de $\mathcal{T}_\varepsilon$ en une application affine.

La condition de normalisation est alors:

iv) $f_\varepsilon(z_0) = 0$ et $f_\varepsilon(z_1) > 0$.

---

[1]) Voici une autre façon de la définir: on ne conserve que les triangles T de $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ pour lesquels il existe une suite de triangles de $\mathcal{T}_\varepsilon^0(\mathcal{U})$ telle que chacun ait une arête commune avec le suivant, et reliant T à un triangle contenant z_0.

Enfin, notons $f: \mathcal{U} \to \mathring{\mathbf{D}}$ l'uniformisation de Riemann de $\mathcal{U}$ normalisée par $f(z_0) = 0$ et $f(z_1) > 0$. Rodin et Sullivan ont montré le

THÉORÈME. *Lorsque* ε *tend vers* $0, f_\varepsilon$ *converge vers* f *uniformément sur les compacts de* $\mathcal{U}$.

C'est ce théorème que nous nous proposons de redémontrer ici. La première étape est la

PROPOSITION. *Il existe une constante* $K \geqslant 1$ *telle que chaque* f_ε *soit* K*-quasiconforme. De plus, si une sous-suite* (f_{ε_i}) *converge uniformément sur les compacts de* $\mathcal{U}$ *vers une fonction* g, *alors* g *est un homéomorphisme* K*-quasiconforme de* $\mathcal{U}$ *sur* $\mathring{\mathbf{D}}$.

La preuve utilise les arguments de [R-S] qui sont désormais classiques et que nous reproduisons ici. Ils reposent sur les deux lemmes géométriques suivants:

LEMME DE L'ANNEAU («Ring Lemma» dans [R-S]). *Soit* c *un cercle de rayon* ρ *et* $c_1, \ldots, c_n$ n *cercles tangents extérieurement à* c, *d'intérieurs deux à deux disjoints, tels que* c_i *soit tangent à* c_{i+1} *et* c_n *tangent à* c_1.

Il existe une constante $\tau_n > 0$ *ne dépendant que de* n *telle que chaque cercle* $c_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ *ait un rayon au moins égal à* $\tau_n \rho$.

Preuve du lemme de l'anneau. Fixons n. Tout d'abord, le rayon du plus grand cercle extérieur, par exemple c_1, est minoré par une constante ne dépendant que de n (obtenue lorsque tous les cercles extérieurs ont même rayon). Le rayon d'un cercle c_2 tangent à c_1 est également minoré universellement, car si il était trop petit, une chaîne de $n - 1$ cercles partant de c_2 ne pourrait pas s'échapper de l'interstice entre c_1 et c. On achève la preuve en répétant le raisonnement pour le cercle c_3 tangent à c_2 et ainsi de suite. □

Le lecteur poura consulter [Ha] pour des estimations de la constante τ_n.

Une suite de cercles $c_1, \ldots, c_n$ deux à deux distincts de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ est une chaîne lorsque c_i et c_{i+1} sont tangents si $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, ainsi que c_n et c_1 si ces derniers ne sont pas tangents au cercle unité. Le second lemme est le

LEMME DES CHAÎNES SÉPARANTES («Length-area lemma» dans [R-S]). *Soit* c *un cercle de* $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ *et* $s_1, \ldots, s_k$ k *chaînes disjointes qui séparent chacune* c *de l'origine et d'un point du cercle unité. Notons* $n_1, \ldots, n_k$ *les longueurs combinatoires de ces chaînes. Alors on a:*

$$\text{rayon}(c) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}}}.$$

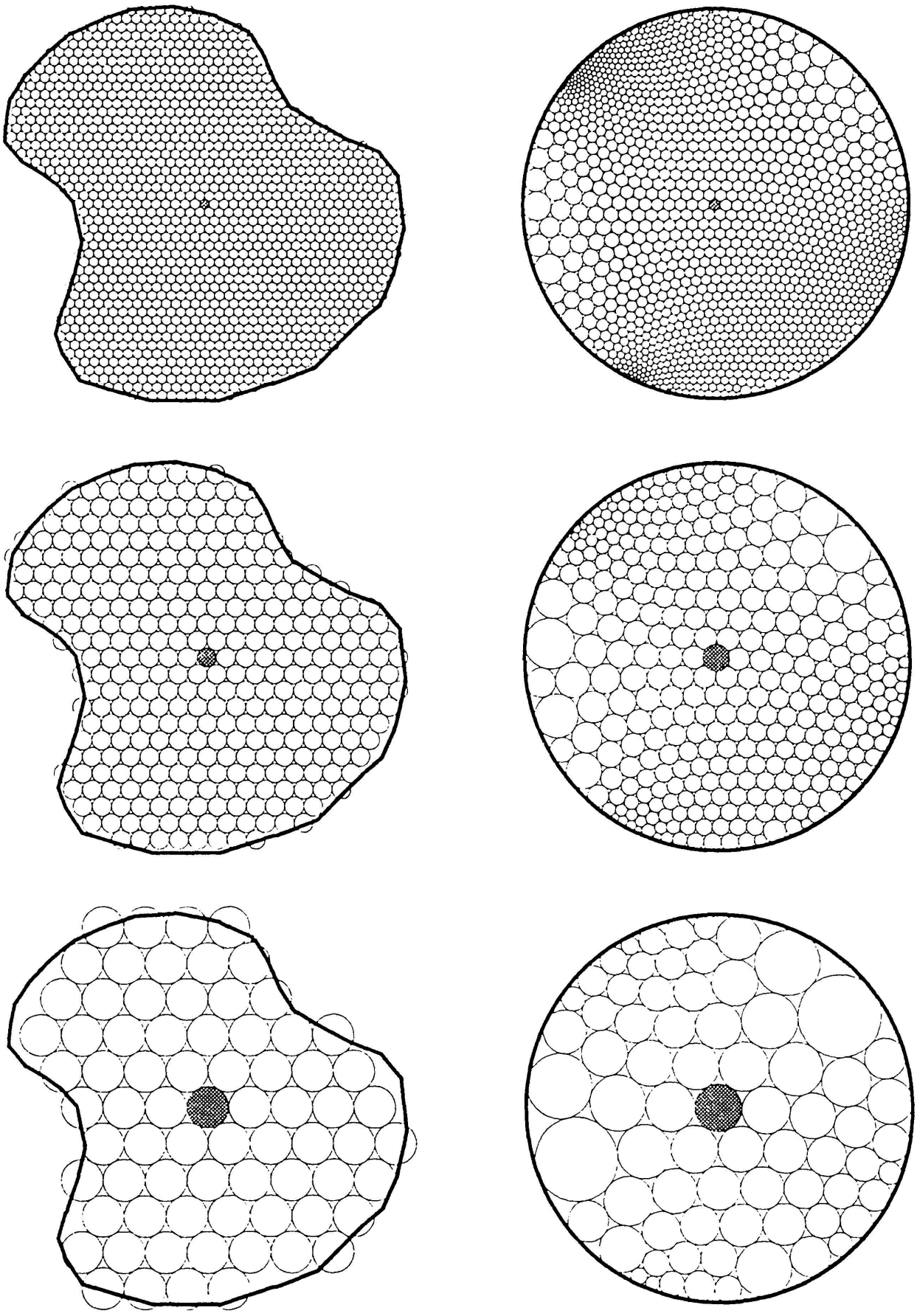

FIGURE 1

(aimablement fournie par Ken Stephenson):

trois empilements $\mathscr{H}_\varepsilon$ dans $\mathscr{U}$ et les trois empilements d'Andreev associés $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$ dans **D**

Preuve du lemme des chaînes séparantes. Notons $\rho_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n_j$, les rayons des cercles de la chaîne S_j. D'après l'inégalité de Schwarz, on a:

$$\left(\sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}\right)^2 \leqslant n_j \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}^2 .$$

Soit $l_j = 2 \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{i,j}$ la longueur géométrique de la chaîne S_j. On a donc

$$\frac{l_j^2}{n_j} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}^2, \quad \text{donc} \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{l_j^2}{n_j} \leqslant 4 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i}^2 \leqslant 4$$

de sorte que $l = \min\{l_1, \ldots, l_k\}$ vérifie:

$$l^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} \leqslant 4 .$$

A cause de l'hypothèse de séparation, l est plus grand que le diamètre de c, d'où le résultat. □

Preuve de la proposition. Notons $\tilde{\mathscr{E}}_\varepsilon$ la triangulation obtenue à partir de $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Le lemme de l'anneau appliqué avec $n = 6$ montre que les angles des triangles de $\tilde{\mathscr{E}}_\varepsilon$ sont minorés par une constante > 0, de sorte que l'application f_ε envoie des triangles équilatéraux sur des triangles dont la distorsion est bornée par une constante indépendante de ε. Ceci assure l'existence d'une constante K telle que pour tout ε, f_ε est K-quasiconforme.

Notons $\mathscr{U}_\varepsilon$ (resp. D_ε) le domaine de définition (resp. l'image) de f_ε. $\mathscr{U}_\varepsilon$ (resp. D_ε) n'est rien d'autre que la réunion des triangles de $\mathscr{H}_\varepsilon$ (resp. $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$). Il est clair que tout compact de $\mathscr{U}$ est contenu dans $\mathscr{U}_\varepsilon$ pour ε assez petit.

Comme les f_ε sont K-quasiconformes, et que $f_\varepsilon(z_0) = 0, \forall\varepsilon$, elles forment une famille équicontinue sur les compacts de $\mathscr{U}$, et donc une famille normale pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathscr{U}$ (voir [Ahl], théorème 1, p. 51). Examinons les propriétés de n'importe quelle fonction g limite d'une sous-suite $\{f_{\varepsilon_i}\}$. Déjà, g est définie sur $\mathscr{U}$ et est K-quasiconforme; g est injective car chaque f_{ε_i}, l'est. Montrons maintenant que l'image de g est $\mathring{\mathbf{D}}$ tout entier.

Il suffit pour cela de montrer que $d_{\mathscr{H}}(\partial D_\varepsilon; \partial D)$ tend vers 0 avec ε ($d_{\mathscr{H}}$ désigne la distance de Hausdorff). Or, lorsque $\varepsilon \to 0$, chaque cercle c du bord est séparé de l'origine et d'un point du cercle unité par de plus en plus de chaînes de longueurs $\leqslant 6, 12, 18\ldots$ Le lemme des chaînes séparantes

et la divergence de la série harmonique prouvent que le rayon de c tend vers 0 avec ε, d'où le résultat.

Toute fonction g limite de f_{ε_i} est donc un homéomorphisme K-quasi-conforme de $\mathcal{U}$ sur $\mathring{\mathbf{D}}$. □

Le but des sections qui suivent est de prouver le résultat crucial suivant:

LEMME-CLÉ. *Soit C un compact de $\mathcal{U}$, c et c' deux cercles tangents de $\mathcal{H}_\varepsilon$ centrés dans C et $\tilde{c}, \tilde{c}'$ les cercles de $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ qui leur correspondent.*

Alors $\frac{\text{rayon}(\tilde{c})}{\text{rayon}(\tilde{c}')}$ *tend vers* 1 *lorsque* $\varepsilon \to 0$, *uniformément sur* C.

Signalons que c'est dans la preuve de ce lemme-clé donnée par Rodin et Sullivan qu'intervient leur résultat de rigidité de l'empilement hexagonal standard, argument que nous nous proposons justement de contourner. La méthode que nous allons suivre permet d'ailleurs d'obtenir un résultat plus fort:

VERSION QUANTITATIVE DU LEMME-CLÉ. *Avec les mêmes notations, il existe une constante M ne dépendant que de C telle que*

$$\left| \frac{\text{rayon}(\tilde{c})}{\text{rayon}(\tilde{c}')} - 1 \right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{-\operatorname{Log}\varepsilon}}$$

uniformément sur C.

Nous terminons cette section en montrant comment le lemme-clé permet de conclure. Ce lemme montre que la restriction à C de chaque f_ε envoie des triangles équilatéraux sur des triangles dont les angles tendent vers $\frac{\pi}{3}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, de sorte que toute limite g des f_ε est 1-conforme, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathcal{U}$ (voir [Ahl], théorème 2, p. 23).

Récapitulons: la famille $\{f_\varepsilon\}$ possède au moins une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts de $\mathcal{U}$, et la limite de toute telle sous-suite est une bijection holomorphe de $\mathcal{U}$ sur $\mathring{\mathbf{D}}$ envoyant z_0 sur 0 et z_1 sur l'axe réel positif, c'est-à-dire est l'uniformisation de Riemann f de $\mathcal{U}$ ainsi normalisée. Le théorème en résulte aussitôt.

III. DÉFORMATIONS D'EMPILEMENTS DE CERCLES

On va construire une famille continue d'empilements de cercles $\{\mathcal{H}_\varepsilon^t\}_{t \in [0,1]}$ telle que $\mathcal{H}_\varepsilon^0 = \mathcal{H}_\varepsilon$ et $\mathcal{H}_\varepsilon^1 = \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ et on va étudier la façon dont varient, en fonction de t, les rayons des cercles de $\mathcal{H}_\varepsilon^t$.

Comme l'ouvert $\mathcal{U}$ est borné, il est tout à fait licite de supposer que $\bar{\mathcal{U}}$ est contenu dans $\mathring{\mathbf{D}}$ et que $z_0 = 0$ et $z_1 > 0$, de sorte que tous les empilements que l'on va considérer seront contenus dans le disque unité $\mathbf{D}$.

A partir de maintenant nous adoptons le point de vue de la géométrie hyperbolique: $\mathring{\mathbf{D}}$ est muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$ à courbure -1. Tout cercle hyperbolique est un cercle euclidien (mais les centres ne sont pas les mêmes). En particulier, les cercles du bord d'un empilement d'Andreev sont des horocycles. C'est ce dernier fait qui motive l'emploi de la géométrie hyperbolique.

Il faut maintenant généraliser la notion d'empilement de cercles. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation (finie ou infinie) d'un disque topologique et S l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. Soit $r = (r_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)^S$. On munit chaque triangle de $\mathcal{T}$ de la métrique hyperbolique à courbure -1 qui au côté ss' affecte la longueur $r_s + r_{s'}$. On obtient ainsi une variété riemanienne à courbure -1 à singularités coniques, notée $\mathcal{T}_r$. Soit s un sommet d'un triangle T de $\mathcal{T}$. Si $\alpha(s, T)$ désigne l'angle en s dans le triangle T et si s est un sommet intérieur, alors la courbure en s est:

$$K_s(r) = 2\pi - \sum_{s \in T} \alpha(s, T) .$$

La famille de cercles $\mathcal{C} = \{C_s ; s \in S\}$, où C_s est le cercle de $\mathcal{T}_r$ de centre s de rayon r_s, possède la propriété suivante: les cercles C_s et $C_{s'}$ sont tangents si et seulement si l'arête ss' appartient au 1-squelette $\mathcal{T}^1$ de la triangulation $\mathcal{T}$.

Si, pour tout sommet intérieur s, on a $K_s(r) = 0$, alors la variété $\mathcal{T}_r$ est immergée isométriquement dans le disque de Poincaré $\mathbf{D}_{\text{hyp}}$ (mais non plongée *a priori*). On dit alors que $\mathcal{C}$ est un empilement de cercles de combinatoire $\mathcal{T}^1$. De plus, $\mathcal{C}$ est un empilement d'Andreev si et seulement si pour tout sommet s du bord de $\mathcal{T}$, $r_s = +\infty$.

REMARQUE. Un empilement d'Andreev est plongé dans le disque de Poincaré. En effet, la variété immergée $\mathcal{T}_r$ est alors à bord convexe, donc plongée d'après le théorème du §3 de [CV].

Le résultat suivant, démontré par Yves Colin de Verdière dans [CV] §5, est aussi le théorème 3 de [B-St2]:

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation finie d'un disque topologique, S (resp. B, I) l'ensemble de ses sommets (resp. sommets du bord; sommets intérieurs).*

Alors pour tout $(r_s)_{s \in B} \in]0, +\infty]^B$, il existe un unique $(r_s)_{s \in I} \in (\mathbf{R}_+^*)^I$ tel que la variété $\mathcal{T}_r$ soit immergée isométriquement dans $\mathbf{D}_{\text{hyp}}$.

On notera que le théorème d'Andreev-Thurston est un cas particulier de ce théorème (faire $r_s = +\infty, \forall s \in B$).

Soit $\Phi: [0, 1[\to [1, +\infty[, t \mapsto \Phi(t)$ un difféomorphisme prolongé par $\Phi(1) = +\infty$. Nous reprenons maintenant les notations de la section II. Pour $t \in [0, 1]$, $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ est défini par les trois conditions suivantes:

i) la combinatoire de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ est $\mathscr{C}_\varepsilon^1$;

ii) si r_ε est le rayon d'un cercle du bord de $\mathscr{H}_\varepsilon$, le rayon du cercle correspondant de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ est $r_\varepsilon(t) = \Phi(t) r_\varepsilon$;

iii) la condition de normalisation est la même que pour $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$.

Notons S_ε (resp. $B_\varepsilon, I_\varepsilon$) l'ensemble des sommets (resp. sommets du bord, sommets intérieurs) de $\mathscr{C}_\varepsilon$. Pour $s \in S_\varepsilon$ on pose:

$$u_\varepsilon^s = \Psi(r_\varepsilon^s) = \int_{r_\varepsilon^s}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sinh \sigma} = -\operatorname{Log} \tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2}$$

(c'est la variable utilisée par Yves Colin de Verdière dans [CV]). On va interpréter la famille $\left\{\frac{d}{dt} u_\varepsilon^s(t)\right\}_{s \in S_\varepsilon}$ comme solution d'un problème de Schrödinger discret.

Notons $u_\varepsilon^B = (u_\varepsilon^s)_{s \in B_\varepsilon} \in [0, +\infty[^{B_\varepsilon}$ (resp. $u_\varepsilon^I = (u_\varepsilon^s)_{s \in I_\varepsilon} \in [0, +\infty[^{I_\varepsilon}$) une famille de réels indexée par B_ε (resp. I_ε). Dans [CV], Yves Colin de Verdière construit une fonctionnelle $F: \mathbf{R}_+^{B_\varepsilon} \times \mathbf{R}_+^{I_\varepsilon} \to \mathbf{R}$ qui possède la propriété suivante: si $d_I F$ désigne la différentielle partielle de F par rapport aux variables indexées par I_ε, alors on a $d_I F(u_\varepsilon^B, u_\varepsilon^I) = 0$ si et seulement si la collection des rayons $\{\Psi^{-1}(u_\varepsilon^s)\}_{s \in S_\varepsilon}$ définit un empilement de cercles de combinatoire $\mathscr{C}_\varepsilon^1$.

Signalons que c'est ce choix de variable u_ε^s qui confère à la fonctionnelle F certaines propriétés — convexité, ... — lui assurant l'existence d'un point critique.

Explicitons la dérivée $d_I F$. Pour ce faire, à tout vecteur $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon} \in \mathbf{R}_+^{S_\varepsilon}$ on associe la variété hyperbolique $\mathscr{C}_{r_\varepsilon}$ à courbure -1 à singularités coniques définie plus haut avec $r_\varepsilon = (r_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon}$ où $r_\varepsilon^s = \Psi^{-1}(u_\varepsilon^s)$. Notant $K_s(u_\varepsilon)$ la courbure en s on a:

$$d_I F(u_\varepsilon) = \sum_{s \in I_\varepsilon} K_s(u_\varepsilon) du_\varepsilon^s .$$

Dans le cas présent, pour tout $t \in [0, 1]$, la collection des rayons $\{r_\varepsilon^s(t)\}_{s \in S_\varepsilon}$ définit un empilement de cercles de combinatoire $\mathscr{C}_\varepsilon$ de sorte que l'on a, en posant $u_\varepsilon^s(t) = \Psi(r_\varepsilon^s(t))$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad d_I F[u_\varepsilon^B(t), u_\varepsilon^I(t)] = 0 .$$

Par dérivation, il vient:

$$d_{II}F[u_\varepsilon^B(t), u_\varepsilon^I(t)] \cdot \dot{u}_\varepsilon^I(t) + d_{BI}F[u_\varepsilon^B(t), u_\varepsilon^I(t)] \cdot \dot{u}_\varepsilon^B(t) = 0 ,$$

d'où:

$$\forall t \in [0,\ 1],\ \sum_{s \in I_\varepsilon} \left(\sum_{\substack{s' \in S_\varepsilon \\ d_c(s,s') \leqslant 1}} \frac{\partial K_s[u_\varepsilon(t)]}{\partial u_\varepsilon^{s'}} \dot{u}_\varepsilon^{s'}(t) \right) du_\varepsilon^s = 0$$

(d_c désigne la distance combinatoire dans le graphe $\mathscr{C}_\varepsilon$). On rappelle que d'après la formule de Gauss-Bonnet, l'aire d'un triangle hyperbolique T d'angles α, β, γ est $A(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, de sorte que, pour tout sommet intérieur s, on a:

$$\sum_{s' \in S_\varepsilon} \frac{\partial K_s(u_\varepsilon)}{\partial u_\varepsilon^{s'}} = \frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^s} + \sum_{s' \sim s} \frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^{s'}} = \sum_{T \ni s} \frac{\partial A(T)}{\partial u_\varepsilon^s}$$

(on note $s' \sim s$ pour s' voisin de s). Pour alléger les notations, on pose, pour $s \in I_\varepsilon$, et $s' \in S_\varepsilon$ voisin de s,

$$c_s = -\frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^s} + \sum_{T \ni s} \frac{\partial A(T)}{\partial u_\varepsilon^s} \quad \text{et} \quad c_{ss'} = -\frac{\partial K_s}{\partial u_\varepsilon^{s'}} .$$

Soit $b: B_\varepsilon \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. A toute fonction $\varphi \in \mathbf{R}^{I_\varepsilon}$ prolongée par b sur B_ε on associe les fonctions $\Delta_b^{\varepsilon,t}\varphi = \Delta_b \varphi \in \mathbf{R}^{I_\varepsilon}$ et $V\varphi \in \mathbf{R}^{I_\varepsilon}$ définie respectivement par: pour tout $s \in I_\varepsilon$,

$$(\Delta_b \varphi)(s) = c_s \varphi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} \varphi(s')$$

$$\text{et} \quad (V\varphi)(s) = V(s)\varphi(s) = \left(-\sum_{T \ni s} \frac{\partial A(T)}{\partial u_\varepsilon^s} \right) \varphi(s) .$$

Les relations suivantes:

$$c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0; \quad c_{ss'} < 0; \quad c_s > 0; \quad c_{ss'} = c_{s's}$$

font de Δ_0 un laplacien discret sur I_ε, c'est-à-dire un endomorphisme symétrique défini positif de $\mathbf{R}^{I_\varepsilon}$. Le fait que $V(s)$ soit > 0 fait de $\Delta_0 + V$ un opérateur de Schrödinger discret sur I_ε (comparer avec [CV-M], section V).

En résumé, le vecteur $\dot{u}_\varepsilon(t) = (\dot{u}_\varepsilon^s(t))_{s \in S_\varepsilon}$ est solution de l'équation de Schrödinger suivante:

$$\begin{cases} \Delta_b^{\varepsilon,t} \dot{u}_\varepsilon + V\dot{u}_\varepsilon = 0 \\ \dot{u}_\varepsilon^s(t) = b(s) = \Phi'(t) \cdot \Psi'[r_\varepsilon^s(t)] \cdot r_\varepsilon^s(0) \quad \text{si } s \in B_\varepsilon . \end{cases}$$

En particulier, $\dot{u}_\varepsilon^s(t) < 0$ si $s \in B_\varepsilon$ (car $\Phi' > 0$ et $\Psi' < 0$). Or on dispose d'un principe du maximum pour les opérateurs de Schrödinger discrets:

LEMME. *Soit pour tout* $s \in I_\varepsilon$ *et* $s' \in S_\varepsilon$ *voisin de* I_ε *un réel* $b_{ss'} \in]0, 1[$ *tel que* $\sum_{s' \sim s} b_{ss'} < 1, \forall s$.

Soit $\varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon}$ *une fonction telle que* $\forall s \in I_\varepsilon$, $\varphi(s) = \sum_{s' \sim s} b_{ss'} \varphi(s')$.

Alors, si φ *est* $\leqslant 0$ *sur* B_ε, φ *est également* $\leqslant 0$ *sur* I_ε. *Si de plus* φ *s'annule sur* I_ε, *alors* φ *est nulle sur* S_ε.

Preuve du lemme. On observe tout d'abord que si $\varphi(s) > 0$ pour un $s \in I_\varepsilon$ alors il existe $s' \sim s$ tel que $\varphi(s') > \varphi(s)$, car, dans le cas contraire, on a

$$\varphi(s) = \sum_{s' \sim s} b_{ss'} \varphi(s') \leqslant \left(\sum_{s' \sim s} b_{ss'} \right) \varphi(s) < \varphi(s) \text{ qui est absurde.}$$

De proche en proche on aboutit à un sommet $s_1 \in B_\varepsilon$ tel que $\varphi(s_1) > \varphi(s) > 0$, de sorte que $\varphi \leqslant 0$ sur B_ε implique $\varphi \leqslant 0$ sur I_ε. Sachant maintenant que φ est $\leqslant 0$ sur S_ε, supposons qu'il existe $s \in I_\varepsilon$ tel que $\varphi(s) = 0$. Il est clair que $\varphi(s') = 0$, $\forall s' \sim s$. De proche en proche, on montre que φ est nulle sur S_ε. □

On applique le lemme aux coefficients $b_{ss'} = -\frac{c_{ss'}}{c_s + V(s)} > 0$ et on déduit que pour tout $s \in I_\varepsilon$, $\dot{u}_\varepsilon^s(t) < 0$. Comme $\dot{u}_\varepsilon^s(t) = \dot{r}_\varepsilon^s(t) \times \Psi'[\dot{r}_\varepsilon^s(t)]$ et que Ψ' est < 0 on déduit que $\dot{r}_\varepsilon^s(t)$ est > 0, $\forall s \in I_\varepsilon$, $\forall t \in [0, 1]$. En résumé, lorsque t croît de 0 à 1, les rayons hyperboliques de tous les cercles de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ augmentent strictement.

Le fait que nous venons de mettre en évidence est l'aspect essentiel d'un résultat, le lemme de Schwarz-Pick discret, qui mérite d'être formulé — et démontré — de façon autonome. Outre le fait que nous utiliserons ces résultats dans la prochaine section, signalons qu'il a fait l'objet de travaux d'Alan Beardon et Kenneth Stephenson (voir [B-St2]).

Soit S l'ensemble des sommets d'une triangulation $\mathscr{C}$ d'un disque topologique. Soient $r = (r_s)_{s \in S}$ et $r' = (r'_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)$ et $\mathscr{C}_r$, $\mathscr{C}_{r'}$ les variétés hyperboliques à courbure -1 à singularités coniques définies comme précédemment à partir de $\mathscr{C}$, r et r'.

On note C_s (resp. C'_s) le cercle de $\mathscr{C}_r$ (resp. $\mathscr{C}_{r'}$) de centre s et de rayon r_s (resp. r'_s). On suppose que les familles $\mathscr{C} = \{C_s\}_{s \in S}$ et $\mathscr{C}' = \{C'_s\}_{s \in S}$ sont des empilements de cercles, c'est-à-dire que $\mathscr{C}_r$ et $\mathscr{C}_{r'}$ sont immergées isométriquement dans le disque de Poincaré. Rappelons que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ne sont pas supposés plongés (comparer à [B-St2]).

On a la

PROPOSITION (Lemme de Schwarz-Pick discret dans [B-St2]).

i) (monotonie). Si $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet frontière* s, *alors* $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet intérieur* s. *De plus, si* $r_{s_0} = r'_{s_0}$ *pour un sommet intérieur* s_0 *alors* $\forall s \in S$, $r_s = r'_s$;

ii) (lemme de Schwarz discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev (i.e.* $r'_s = +\infty$ *pour* $s \in B$*) alors* $r_s \leqslant r'_s$, $\forall s \in S$;

iii) (lemme de Pick discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev alors la distance entre deux sommets* s_0 *et* s_1 *dans* $\mathscr{C}_r$ *est inférieure à la distance entre les deux sommets correspondants dans* $\mathscr{C}_{r'}$.

Preuve de la proposition. Prouvons le point *i)*. On réalise la variété $\mathscr{C}_{r'}$, comme le temps 1 d'une déformation $\{\mathscr{C}_r(t);\ t \in [0, 1]\}$ de la variété $\mathscr{C}_r$ comme ci-avant, à ceci près que les rayons frontières de $\mathscr{C}_r(t)$ sont définis par

$$u_s(t) = \Psi(r_s(t)) = (1 - t)\Psi(r_s) + t\Psi(r'_s)\ .$$

Pour tout t, il existe un opérateur de Schrödinger discret $\Delta^t + V^t$ sur $\mathscr{C}^1$ (le 1-squelette de $\mathscr{C}$) tel que:

$$\begin{cases} \Delta^t \dot{u}(t) + V^t \dot{u}(t) = 0 \\ \dot{u}_s(t) = \Psi(r'_s) - \Psi(r_s) \quad \text{si } s \in B. \end{cases}$$

Comme Ψ est décroissante, on a $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$, $\forall s \in B$. D'après le principe du maximum pour les opérateurs de Schrödinger on a également $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$ pour tout sommet intérieur s, donc $\Psi(r'_s) \leqslant \Psi(r_s)$ donc $r'_s \geqslant r_s$ pour ces sommets. De plus, $r_{s_0} = r'_{s_0}$ pour un sommet intérieur s_0 implique $\dot{u}_{s_0}(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ donc, d'après le même lemme, $\dot{u}_s(t) = 0$, $\forall t$, $\forall s \in S$ et donc $r_s = r'_s$, $\forall s \in S$.

Les points *ii)* et *iii)* résultent de *(i)*. □

IV. ESTIMATIONS À PRIORI DES RAYONS

Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $\mathscr{U}$, et S_ε^K l'ensemble des sommets de $\mathscr{C}_\varepsilon$ contenus dans K. On note $\tilde{r}_\varepsilon = (\tilde{r}_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon}$ la collection des rayons de l'empilement d'Andreev $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Le but de cette section est de démontrer la

PROPOSITION. *Il existe trois constantes* c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* K *et* $\mathcal{U}$ *telles que, si* ε *est assez petit, alors, pour* s *et* $s' \in S_\varepsilon^K$, *et* $t \in [0, 1]$,

i) $1 \leqslant \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{r_\varepsilon^s(t)} \leqslant c_1$,

ii) $\frac{1}{c_2} \leqslant \frac{r_\varepsilon^s(t)}{r_\varepsilon^{s'}(t)} \leqslant c_2$,

iii) $\frac{\varepsilon}{c_3} \leqslant r_\varepsilon^s(t) \leqslant c_3\varepsilon$.

Cette proposition a été mise en évidence par Kenneth Stephenson: c'est le lemme 3 de [St1] et le lemme de comparaison 8.4.1 de [St2]. Voir aussi le lemme 8.3.1 de [St3]. Nous en reproduisons ici la démonstration, en suivant [St2]. Celle-ci est assez technique, et utilise à plusieurs reprises le lemme de Schwarz-Pick discret de la section précédente. Il faut tout d'abord un

LEMME DE DISTORSION («Distortion Lemma» 8.3.1 de [St2]). *Soit* $a \in]0, 1[$ *et* $\varepsilon \in]0, \frac{a}{64}[$. *Soit* Δ *le disque ouvert de centre* ζ *et de rayon* a *supposé contenu dans le disque unité. Soit* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des cercles de rayon* ε *contenus dans* Δ *et centrés sur* $\zeta + 2\varepsilon\mathbf{Z} + 2\varepsilon e^{\frac{i\pi}{3}}\mathbf{Z}$. *Soit* C_0 *le cercle de* $\mathcal{C}$ *entré en* ζ *et* $\tilde{C}_0$ *le cercle de l'empilement d'Andreev* $\tilde{\mathcal{C}}$ *de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathbf{D}$ *correspondant à* C_0 *et supposé centré en* 0.

Alors on a $\tilde{\rho} \leqslant \frac{\varepsilon}{a - 64\varepsilon}$, *où* $\tilde{\rho}$ *désigne le rayon euclidien du cercle* $\tilde{C}_0$.

Preuve du lemme de distorsion. Il suffit de traiter le cas où $\zeta = 0$ et $a = 1$, le cas général s'en déduisant aussitôt. Notons $\partial\mathcal{C}$ (resp. $\partial\tilde{\mathcal{C}}$) l'ensemble des cercles du bord de $\mathcal{C}$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}$). Soit $\nu\tilde{\mathcal{C}}$ l'homothétique de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans l'homothétie (euclidienne) de centre 0 et de rapport ν. Soit C_s un cercle de $\partial\mathcal{C}$ et $\tilde{C}_s$, $\tilde{C}'_s$ les cercles qui lui correspondent dans les empilements $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\nu\tilde{\mathcal{C}}$. Notons $\tilde{\rho}_s$ le rayon euclidien de $\tilde{C}_s$. Les rayons euclidiens de C_s et C'_s sont respectivement ε et $\nu\tilde{\rho}_s$. On note enfin r_s et r'_s les rayons hyperboliques de C_s et C'_s (le rayon hyperbolique de $\tilde{C}_s$ vaut $+\infty$). Nous allons démontrer que, lorsque $\nu = 1 - 64\varepsilon$, alors $r'_s \leqslant r_s$.

Commençons par minorer r_s. On observe que $\partial\mathcal{C}$ est contenu dans l'anneau $\{1 - 8\varepsilon < |z| < 1\}$ sur lequel la densité de Poincaré est minorée par $\frac{2}{1 - (1 - 8\varepsilon)^2}$, de sorte que l'on a:

$$r_s \geqslant \frac{2\varepsilon}{1 - (1 - 8\varepsilon)^2} = \frac{2\varepsilon}{16\varepsilon - 64\varepsilon^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - 4\varepsilon} > \frac{1}{8}.$$

A présent, majorons r'_s. Comme $\partial\mathcal{C}$ est contenu dans l'anneau $\{1 - 8\varepsilon < |z| < 1\}$, il en est de même pour $\partial\tilde{\mathcal{C}}$ d'après le lemme de

Schwarz-Pick discret, de sorte que $\tilde{\rho}_s < 4\varepsilon$, donc le rayon euclidien de C'_s vérifie $\nu\tilde{\rho}_s < 4\varepsilon\nu$. Par ailleurs, C'_s est contenu dans le disque $\{|z| < \nu\}$ sur lequel la densité de Poincaré est majorée par $\frac{2}{1-\nu^2}$. On en déduit que

$$r'_s \leqslant \frac{2}{1-\nu^2} \times \nu\tilde{\rho}_s \leqslant \frac{2}{1-\nu^2} \times 4\varepsilon\nu = \frac{8\varepsilon}{1-\nu} \times \frac{\nu}{1+\nu} \leqslant \frac{8\varepsilon}{1-\nu} = \frac{1}{8}$$

$$\text{si } \nu = 1 - 64\varepsilon .$$

Nous pouvons conclure: si $\nu = 1 - 64\varepsilon$, alors pour tout sommet frontière s, on a $r'_s \leqslant r_s$. D'après le principe de monotonie du lemme de Schwarz-Pick discret, on a $r'_0 \leqslant r_0$ ou r'_0 et r_0 désignent les rayons hyperboliques des cercles C'_0 et C_0. Ces cercles étant centrés en 0, on a la même inégalité pour leurs rayons euclidiens, à savoir $\nu\tilde{\rho}_0 \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\tilde{\rho}_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{1-64\varepsilon}$$

qui est bien l'inégalité annoncée. □

Le lemme que voici, qui peut paraître surprenant au premier abord, est vraiment spécifique à la géométrie hyperbolique (voir [B-St2]):

LEMME. *Soit, dans le disque de Poincaré, un cercle C de rayon r, et $C_1, \ldots, C_n$, n cercles tangents extérieurement à C, d'intérieurs deux à deux disjoints, tels que C_j soit tangent à C_{j+1} et C_n à C_1.*

Alors on a $r < \sqrt{n}$.

Preuve du lemme. Le cercle C est contenu dans un polygone géodésique P à n côtés dont les sommets sont les centres des cercles $C_1, \ldots, C_n$, donc:

$$\text{aire}(C) < \text{aire}(P) \leqslant (n-2)\pi ,$$

et le résultat découle de la formule donnant l'aire d'un disque hyperbolique en fonction de son rayon: $\text{aire}(C) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)$ de sorte que

$$\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \leqslant 4\pi \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) < (n-2)\pi < n\pi . \quad \square$$

REMARQUE. L'inégalité optimale est $r \leqslant -\operatorname{Log}\sin\frac{\pi}{n}$ (cf. [B-St3], p. 34 et [M], p. 75).

Preuve de la proposition. Prouvons *i)*. D'après le principe de monotonie du lemme de Schwarz-Pick, on a $\forall t \in [0, 1]$, $r^s_\varepsilon \leqslant r^s_\varepsilon(t) \leqslant \tilde{r}^s_\varepsilon$ de sorte qu'il suffit de comparer les rayons hyperboliques des cercles de $\mathscr{H}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$.

Posons $\delta = \operatorname{dist}(K; \mathbf{C} \setminus \mathcal{U})$. On applique le lemme de distorsion au disque $\Delta = \{|z - s| < \delta\}$ où s est un sommet fixé de S_ε^K. L'ensemble $\mathcal{C}$ défini dans l'énoncé du lemme est un sous-empilement de $\mathcal{H}_\varepsilon$, le cercle C_0 est ici le cercle C_ε^s et le cercle $\tilde{C}_0$ est noté $C_s'^s$. Le rayon euclidien ρ_s' de ce dernier cercle vérifie donc

$$\frac{\rho_s'}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\delta - 64\varepsilon} \leqslant \frac{2}{\delta} \text{ dès que } \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{128}.$$

Revenons aux empilements $\mathcal{H}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$. Quitte à appliquer une transformation de Möbius à $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$, on peut toujours supposer que $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est centré à l'origine. Notons $\tilde{\rho}_s$ le rayon euclidien de $\tilde{C}_\varepsilon^s$. Comme $\mathcal{C}$ est un sous-empilement de l'empilement $\mathcal{H}_\varepsilon$, il résulte du lemme de Schwarz-Pick *i)* et *ii)* que le rayon hyperbolique de $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est inférieur au rayon hyperbolique de $C_\varepsilon'^s$. Comme ces cercles sont centrés en l'origine, ceci reste vrai pour leurs rayons euclidiens. On en déduit:

$$\tilde{\rho}_s \leqslant \rho_s' \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Comme $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est centré en 0 et que $\tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant \sqrt{6}$ d'après le dernier lemme, on déduit que $\tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant \frac{2\tilde{\rho}_s}{1-\alpha^2}$ où $\alpha = \frac{e^{\sqrt{6}}-1}{e^{\sqrt{6}}+1}$. Par ailleurs, comme $\varepsilon \leqslant r_\varepsilon^s$ on a $\frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{r_\varepsilon^s} \leqslant \frac{2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\tilde{\rho}_s}{\varepsilon} \leqslant \frac{4}{\delta(1-\alpha^2)}$ ce qui fournit une constante c_1 ne dépendant que de $\mathcal{U}$ et K.

Prouvons *ii)*. Soit s et $s' \in S_\varepsilon^K$, $t \in [0; 1]$ et $b = \frac{2}{1-(1-\delta)^2}$. Dans la succession d'inégalités qui suit, nous utilisons respectivement: le lemme de Schwarz-Pick discret; le résultat *i)* ci-dessus; la comparaison des rayons euclidiens et hyperboliques de $\mathcal{H}_\varepsilon$ dans la région $\{|z| < 1 - \delta\}$; le fait que le rayon euclidien d'un cercle est toujours inférieur à son rayon hyperbolique; et le principe de monotonie:

$$r_\varepsilon^s(t) \leqslant \tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot r_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot b \cdot \varepsilon \leqslant c_1 \cdot b \cdot r_\varepsilon^{s'} \leqslant c_1 \cdot b \cdot r_\varepsilon^{s'}(t)$$

de sorte que $c_2 = c_1 \cdot b$ convient.

Enfin, prouvons *iii)*. Fixons $s \in S_\varepsilon^K$, et soit b la constante introduite ci-avant. On a $r_\varepsilon^s \leqslant b\varepsilon$. D'après l'inégalité *i)*, on a: $r_\varepsilon^s(t) \leqslant \tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot r_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot b\varepsilon$. Comme $\varepsilon \leqslant r_\varepsilon^s \leqslant r_\varepsilon^s(t)$, on a l'inégalité cherchée avec $c_3 = c_1 \cdot b (= c_2)$. □

V. CHANGEMENT DE VARIABLE

L'objet de cette section est de ramener l'étude de $\dot{u}_\varepsilon \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon}$ qui est solution d'une équation de Schrödinger discrète, à celle d'une fonction harmonique sur S_ε, solution d'un problème de Dirichlet. Le point de départ de cette réduction est le

LEMME 1. *Soit* $\varphi: S_\varepsilon \to \mathbf{R}$ *une solution d'une équation de Schrödinger discrète du type* $(\Delta + V)\varphi = 0$ *où* $V: S_\varepsilon \to \mathbf{R}_+$ *et* $(\Delta\varphi)(s) = c_s\varphi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi(s')$, $\forall s \in I_\varepsilon$ *avec* $c_s > 0$, $c_{ss'} < 0$, $c_{ss'} = c_{s's}$ *et* $\forall s \in I_\varepsilon$, $c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0$. *Soit* $\varphi_0: S_\varepsilon \to \mathbf{R}^*$ *une autre fonction vérifiant* $(\Delta + V)\varphi_0 = 0$.

Alors la fonction $\Psi = \varphi/\varphi_0$ *est solution de* $\tilde{\Delta}\Psi = 0$, *où l'opérateur* $\tilde{\Delta}$ *est donné par* $\tilde{\Delta}\Psi(s) = \tilde{c}_s\Psi(s) + \sum_{s' \sim s} \tilde{c}_{ss'}\Psi(s')$; *les coefficients* $\tilde{c}_s$ *et* $\tilde{c}_{ss'}$ *vérifient les mêmes propriétés que les* c_s *et* $c_{ss'}$ *et sont donnés par:* $\tilde{c}_{ss'} = \varphi_0(s)\varphi_0(s')c_{ss'}$.

Preuve du lemme 1. Elle est élémentaire: sachant que $(\Delta + V)(\varphi_0\Psi) = 0$, on a $\forall s \in I_\varepsilon$,

$$c_s\varphi_0(s)\Psi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')\Psi(s') + V(s)\varphi_0(s)\Psi(s) = 0 . \qquad (*)$$

Comme $(\Delta + V)\varphi_0 = 0$, on a

$$c_s\varphi_0(s) + V(s)\varphi_0(s) = -\sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')$$

d'où, en reportant dans (*), $\sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')[\Psi(s') - \Psi(s)] = 0$, d'où $\tilde{\Delta}\Psi(s) = 0$ avec $\tilde{c}_{ss'} = c_{ss'}\varphi_0(s')\varphi_0(s)$ et $\tilde{c}_s = -\sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')\varphi_0(s)$, ce qui prouve le lemme 1. □

Pour appliquer ce lemme à $\varphi = \dot{u}_\varepsilon$ et à l'opérateur $\Delta_b^{\varepsilon,t} + V$ obtenu à la section III, il faut maintenant construire une solution explicite φ_0. Voici un procédé général:

LEMME 2. *Soit* $\mathscr{H}_\varepsilon^t(\lambda), \lambda \in]-\alpha, \alpha[$ *une déformation continûment dérivable de l'empilement* $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ *telle que* $\mathscr{H}_\varepsilon^t(0) = \mathscr{H}_\varepsilon^t$, *et* $u_{\varepsilon,\lambda}(t)$

$\in [0, +\infty[^{S_\varepsilon}$ *la fonction définie sur* S_ε *associée aux rayons de l'empilement* $\mathscr{H}^t_\varepsilon(\lambda)$.

Alors on a $(\Delta_b^{\varepsilon,t} + V)\frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0.$

Preuve du lemme 2. Soit $F: \mathbf{R}_+^{B_\varepsilon} \times \mathbf{R}_+^{I_\varepsilon} \to \mathbf{R}$ la fonctionnelle construite par Yves Colin de Verdière dans [CV] et évoquée à la section III. Puisque pour tout $\lambda \in]-\alpha, \alpha[$, $\mathscr{H}^t_\varepsilon(\lambda)$ est un empilement de cercles, on a $d_I F(u^B_{\varepsilon,\lambda}, u^I_{\varepsilon,\lambda}) = 0$. En dérivant par rapport à λ, il vient:

$$\forall \lambda \in]-\alpha, \alpha[, \sum_{s \in I_\varepsilon} \left(\sum_{d_c(s|s) \leqslant 1} \frac{\partial K_s[u_{\varepsilon,\lambda}]}{\partial u^{s'}_\varepsilon} \cdot \frac{du^{s'}_{\varepsilon,\lambda}}{d\lambda} \right) du^s_\varepsilon = 0 .$$

En $\lambda = 0$, on a:

$$\forall s \in I_\varepsilon, \frac{\partial K_s(u_\varepsilon)}{\partial u^s_\varepsilon} \cdot \left(\frac{du^s_{\varepsilon,\lambda}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} + \sum_{s' \sim s} \frac{\partial K_s(u_\varepsilon)}{\partial u^{s'}_\varepsilon} \cdot \left(\frac{du^{s'}_{\varepsilon,\lambda}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$$

c'est-à-dire exactement $(\Delta_b^{\varepsilon,t} + V) \cdot \left(\frac{du_{\varepsilon,\lambda}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 0.$ □

Il reste maintenant à fabriquer une déformation explicite de l'empilement $\mathscr{H}^t_\varepsilon$.

En guise de premier essai, on va examiner l'image de l'empilement $\mathscr{H}^t_\varepsilon$ par l'homothétie euclidienne de centre 0 et de rapport $1 + \lambda$. Pour une raison qui sera expliquée plus loin, ça n'est pas cet exemple que nous retiendrons en définitive. Néanmoins, on peut en dégager certaines informations qui seront utiles:

LEMME 3. *Soit, dans le disque hyperbolique, un cercle* C *de rayon* r *et dont le centre est à distance hyperbolique* $d > r$ *de l'origine. Soit* r_λ *le rayon (hyperbolique) de l'image de* C *par l'homothétie euclidienne de centre* 0 *et de rapport* $1 + \lambda$.

Si $u_\lambda = -\operatorname{Log}\tanh\frac{r_\lambda}{2}$, *alors* $\frac{du_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = -\frac{\cosh d}{\cosh r}$.

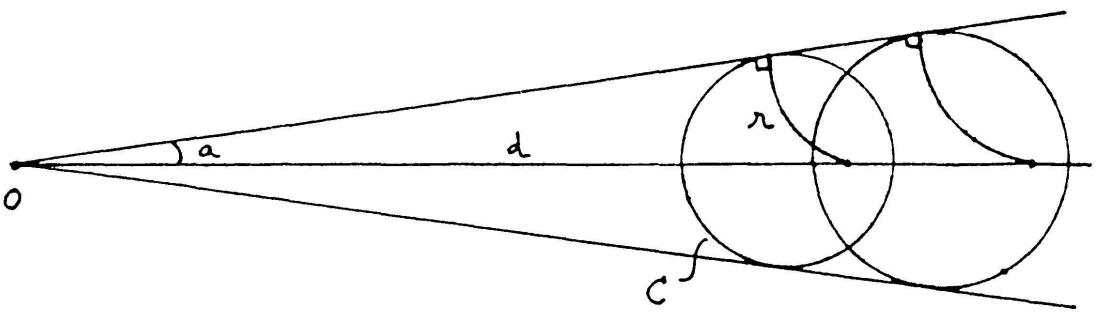

FIGURE 2

Preuve du lemme 3. Notons a le demi-angle sous lequel le cercle C est vu du point 0 (cf. fig. 2). D'après les formules de trigonométrie hyperbolique dans le triangle rectangle (voir [B], p. 148), on a

$$\sinh r = \sin a \cdot \sinh d \qquad (*)$$

Notons δ la distance euclidienne du centre hyperbolique de C à l'origine. On rappelle que $d = \operatorname{Log} \frac{1+\delta}{1-\delta}$ et que $\delta = \tanh \frac{d}{2}$. On en déduit que $\sinh d = \frac{2\delta}{1-\delta^2}$, de sorte que:

$$\frac{d}{d\lambda}(\sinh h)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2(1+d)\delta}{1-(1+\lambda)^2\delta^2}\right)\Big|_{\lambda=0} = \frac{2\delta}{1-\delta^2}\cdot\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2}$$
$$= \sinh d \cdot \cosh d\ .$$

En dérivant (*) par rapport à λ en $\lambda = 0$, il vient donc, comme a est constant,

$$\cosh r \cdot \frac{dr}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \sin a \times \frac{d}{d\lambda}(\sinh d)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\sinh r}{\sinh d} \times \sinh d \cdot \cosh d,$$

de sorte

$$\frac{1}{\sinh r}\cdot\frac{dr}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \frac{\cosh d}{\cosh r}\ .$$

Comme
$u = -\operatorname{Log}\tanh\frac{r}{2} = \int_r^{+\infty}\frac{d\sigma}{\sinh\sigma}$ on a $\frac{du}{d\lambda}\Big|_0 = -\frac{1}{\sinh r}\cdot\frac{dr}{d\lambda}\Big|_0 = -\frac{\cosh d}{\cosh r}$. □

Voici le résultat qui, joint à la section suivante, nous permettra de conclure:

LEMME 4. *Soit K un compact de $\mathcal{U}$ et S_ε^K l'ensemble des sommets de S_ε dans K. Alors il existe une fonction $\varphi_\varepsilon^t : S_\varepsilon \to \mathbf{R}_-^*$ vérifiant:*

(i) $(\Delta_b^{\varepsilon,t} + V)\varphi_\varepsilon^t = 0$

(ii) $\forall s, s' \in S_\varepsilon^K$ *tels que* $s' \sim s$, *on a* $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi_\varepsilon^r(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')} = 1$.

Preuve du lemme 4. On observe tout d'abord qu'il existe un compact K' du disque hyperbolique tel que si ε est assez petit alors pour tout $t \in [0, 1]$, tous les cercles de $\mathcal{H}_\varepsilon^t$ correspondant à des sommets dans S_ε^K sont contenus dans K'. Ceci résulte du point *iii)* de la proposition de la section IV et du fait que le diamètre combinatoire de $\mathcal{H}_\varepsilon^t$ est $\leqslant \frac{C}{\varepsilon}$, la constante C ne dépendant que de $\mathcal{U}$.

Considérons maintenant une isométrie hyperbolique j telle que $j(K')$ ne contienne pas 0. Notons h_λ l'homothétie euclidienne de centre 0 de rapport $1 + \lambda$. On définit l'emplacement $\mathscr{H}_\varepsilon^t(\lambda)$ comme étant l'image de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ par l'application $j^{-1} \circ h_\lambda \circ j$.

Avec les notations du lemme 2, on pose

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = \left.\frac{du_{\varepsilon,t}^s(t)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

φ_ε^t vérifie *i)* d'après ce lemme. De plus, comme j est une isométrie, on a d'après le lemme 3,

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = -\frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh r_\varepsilon^s(t)}$$

où $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$ est la distance à l'origine du centre du cercle de $j(\mathscr{H}_\varepsilon^t)$ correspondant au sommet s. Déjà, $\lim_{\varepsilon \to 0} \cosh r_\varepsilon^s(t) = 1$ d'après le point *iii)* de la proposition du IV.

Notons δ la distance de 0 à $j(K')$, et σ, σ' les centres des cercles de $j(\mathscr{H}_\varepsilon^t)$ images par j de deux cercles tangents de $\mathscr{H}_\varepsilon^t$ correspondants aux sommets s et s' de S_ε^K.

Alors les longueurs $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$ et $\tilde{d}_\varepsilon^t(s')$ des côtés 0σ et $0\sigma'$ du triangle $(0\sigma\sigma')$ sont minorées par $\delta > 0$ tandis que la longueur $r_\varepsilon^s(t) + r_\varepsilon^{s'}(t)$ du côté $\sigma\sigma'$ tend vers 0 avec ε uniformément en t. On en déduit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s')} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')} = 1,$$

la limite étant uniforme en t, ce qui prouve le point *ii)*. □

VI. Inégalité de Harnack

Le but de cette section est de terminer la preuve du théorème de Rodin-Sullivan en démontrant la

Proposition (Inégalité de Harnack). *Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $\mathscr{U}$ et A, B deux réels vérifiant $0 < A < B$.*

Pour tout compact $\tilde{K}$ d'intérieur non vide contenu dans $\mathring{K}$, il existe une constante $C = C(\tilde{K})$ possédant la propriété suivante:

Soit Δ_ε *un laplacien discret sur* S_s^K *de la forme* $\Delta_\varepsilon \varphi(s) = c_s^\varepsilon \varphi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}^\varepsilon \varphi(s')$ *et dont les coefficients vérifient:* $\forall s, s' \in S_\varepsilon^K$, $\forall \varepsilon > 0$, $c_s^\varepsilon \in [A, B]$ *et* $-c_{ss'}^\varepsilon \in [A, B]$.

Soit ψ_ε *une fonction définie sur* S_ε^K, *à valeurs positives non nulles et telle que* $\Delta_\varepsilon \psi_\varepsilon = 0$.

Alors pour tous sommets voisins $s, s' \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$, *on a:*

$$\left| \frac{\Psi_\varepsilon(s)}{\Psi_\varepsilon(s')} - 1 \right| \leqslant \frac{C(\tilde{K})}{\sqrt{-\operatorname{Log} \varepsilon}}.$$

Nous différons provisoirement la preuve de cette proposition, et montrons maintenant pourquoi celle-ci implique le lemme-clé de la section II. Soit donc $\tilde{K}$ un compact d'intérieur non vide de $\mathcal{U}$. Il s'agit de voir que, grâce à la proposition, si $s, s' \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ sont voisins, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{\tilde{r}_\varepsilon^{s'}} = 1$$

et ce uniformément sur $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$. On part de

$$\tilde{u}_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^{s'} = u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} + \int_0^1 (\dot{u}_\varepsilon^s - \dot{u}_\varepsilon^{s'})\, dt$$

$$= u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} + \int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s \left(1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s}\right) dt .$$

On a

$$u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} = \operatorname{Log} \frac{\tanh \frac{r^{s'}}{2}}{\tanh \frac{r^s}{2}}$$

avec $r_\varepsilon^s \sim r_\varepsilon^{s'} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ uniformément par rapport à s et $s' \sim s$ dans $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$, de sorte que $u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} \to 0$.

Soit φ_ε^t la fonction définie dans le lemme 4 de la section V avec un compact K contenu dans $\mathcal{U}$ et dont l'intérieur contient $\tilde{K}$.

Soit ψ_ε^t la fonction définie par $\dot{u}_\varepsilon^s(t) = \varphi_\varepsilon^t(s) \cdot \psi_\varepsilon^t(s)$. D'après le lemme 1 de V, ψ_ε^t est solution d'une équation du type $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, t} \psi_\varepsilon^t = 0$. Comme $\dot{u}_\varepsilon(t) < 0$ et que $\varphi_\varepsilon^t < 0$, on a que $\psi_\varepsilon^t > 0$. De plus, les coefficients de $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, t}$ sont de la forme $\tilde{c}_{ss'}^\varepsilon = \varphi_\varepsilon^t(s) \varphi_\varepsilon^t(s') c_{ss'}$. Il résulte du point *ii)* de la proposition du IV, qu'il existe deux constantes A et $B > A > 0$ telles que $A \leqslant -\tilde{c}_{ss'}^\varepsilon \leqslant B$ et $A \leqslant \tilde{c}_s^\varepsilon \leqslant B$. La proposition de la présente section assure alors que $\frac{\psi_\varepsilon^t(s)}{\psi_\varepsilon^t(s')}$ tend vers 1 uniformément sur $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ et par rapport à $t \in [0, 1]$. D'après

le point *ii)* du lemme 4 de V, le quotient $\frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')}$ possède la même propriété de sorte que $\sup_{t\in[0,1]} \left| 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}(t)}{\dot{u}_\varepsilon^s(t)} \right|$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ uniformément sur $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$. Comme $\dot{u}_\varepsilon^s < 0$ on a donc:

$$\left| \int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s \cdot \left(1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s}\right) dt \right| \leqslant \sup_{[0,1]} \left| 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right| \times \int_0^1 (-\dot{u}_\varepsilon^s)\, dt$$

et

$$-\int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s dt = u_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^s = \operatorname{Log} \frac{\tanh \frac{\tilde{r}^s}{2}}{\tanh \frac{r^s}{2}} \leqslant \operatorname{Log} \frac{\tanh \frac{c_3 \varepsilon}{2}}{\tanh \frac{\varepsilon}{2c_3}}$$

où c_3 est la constante fournie par le point *iii)* de la proposition de IV. D'après les propriétés de la fonction tanh au voisinage de 0, cette dernière quantité est majorée par une constante ne dépendant pas de ε. On en déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int_0^1 (\dot{u}_\varepsilon^s - \dot{u}_\varepsilon^{s'})\, dt \right| = 0$ uniformément sur $\tilde{K}$. On en déduit donc que $\operatorname{Log}\left(\tanh \frac{rs'}{2} \Big/ \tanh \frac{rs}{2}\right) = \tilde{u}_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^{s'}$ tend vers 0 avec ε, et ce uniformément sur $\tilde{K}$, de sorte que le rapport $\left(\tanh \frac{rs'}{2} \Big/ \tanh \frac{rs}{2}\right)$ tend vers 1. Comme les rayons $\tilde{r}_\varepsilon^s$ et $\tilde{r}_\varepsilon^{s'}$ tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ (résulte des points *i)* et *iii)* de la proposition du IV), le rapport $\frac{\tilde{r}_\varepsilon^{s'}}{\tilde{r}_\varepsilon^s}$ tend lui aussi vers 1 avec ε et uniformément sur $\tilde{K}$, ce qui est bien l'énoncé du lemme-clé. La version quantitative de ce lemme provient de l'estimation donnée dans la proposition.

Le théorème de Rodin-Sullivan est donc démontré modulo l'inégalité de Harnack. Nous terminons donc par la

Preuve de la proposition. Comme annoncé dans l'introduction, nous obtenons l'inégalité de Harnack par voie probabiliste. Le début de la preuve que voici s'inspire de [St2], §9.3 et de [Sp], §13-P1.

Introduisons la matrice de transition $P_\varepsilon = [p_{ss'}^\varepsilon]_{s,s'\in S_\varepsilon^K}$ associée au laplacien Δ_ε et définie par:

$$p_{ss'}^\varepsilon = -\frac{c_{ss'}^\varepsilon}{c_s^\varepsilon} \quad \text{si } s \sim s' \text{ et } p_{ss'}^\varepsilon = 0 \text{ sinon .}$$

On a $p_{ss'}^\varepsilon \in]0,1[$ et $\forall s \in I_\varepsilon^K$ (les sommets intérieurs de S_ε^K), $\sum_{s'\sim s} p_{ss'}^\varepsilon = 1$. De plus, il existe deux constantes α et β ne dépendant que de A et B telles que $0 < \alpha \leqslant p_{ss'}^\varepsilon \leqslant \beta < 1$, $\forall\varepsilon$, $\forall s \in I_\varepsilon^K$, $\forall s' \in S_\varepsilon^K$ tel que $s' \sim s$.

Sur l'univers $\Omega_\varepsilon = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots) \in (S_\varepsilon^K)^{\mathbb{N}}\}$ on considère la tribu cylindrique Σ_ε engendrée par les événements $\{\omega_{i_1} = s_1, \ldots, \omega_{i_p} = s_p\}$ où

$p \in \mathbf{N}^*$, $i_1, \ldots, i_p \in \mathbf{N}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, et $s_1, \ldots, s_p \in S_\varepsilon^K$. On note X_n la variable aléatoire sur $(\Omega_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ à valeurs dans S_ε^K et définie par $\forall \omega \in \Omega_\varepsilon$, $X_n(\omega) = \omega_n$.

Fixons un sommet $s \in S_\varepsilon^K$. On définit la probabilité P_s sur $(\Omega_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ associée à la marche aléatoire partant de s, de la façon suivante:

$$P_s(X_0 = s) = 1 \text{ et } P_s(X_{n+1} = v \mid X_n = u) = \begin{cases} p_{uv}^\varepsilon & \text{si } u \in I_\varepsilon^K \\ \delta_{u,v} & \text{si } u \in B_\varepsilon^K \end{cases}$$

(B_ε^K sont les sommets frontières de S_ε^K). En particulier, on décide que les sommets de B_ε^K sont absorbants.

Soit $\tau_{B_\varepsilon^K}$ le premier temps d'atteinte du bord B_ε^K. C'est le temps d'arrêt défini par: $\tau_{B_\varepsilon^K}(\omega) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } X_n(\omega) \in B_\varepsilon^K\}$. On a le

LEMME 1. *Le temps d'arrêt* $\tau_{B_\varepsilon^K}$ *est fini* P_s*-presque sûrement.*

Preuve du lemme 1. Soit h la fonction définie sur S_ε^K par $h(s) = P_s\{\tau_{B_\varepsilon^K} < +\infty\}$. La fonction h est harmonique pour Δ_ε et vérifie $h(s) = 1$, $\forall s \in B_\varepsilon^K$ de sorte que, par unicité de la solution du problème de Dirichlet, $h(s) = 1$, $\forall s \in I_\varepsilon^K$. □

Notons maintenant $\mathbf{E}_s$ l'espérance pour la probabilité P_s. Pour toute fonction harmonique Ψ, on a $\mathbf{E}_s \Psi(X_1) = \Psi(s)$, puis (récurrence): $\mathbf{E}_s \Psi(X_n) = \Psi(s)$. Plus généralement, on a le

LEMME 2. *Pour toute fonction harmonique* Ψ *et pour tout temps d'arrêt* τ *vérifiant* $\tau \leqslant \tau_{B_\varepsilon^K}$, *on a:* $\mathbf{E}_s \Psi(X_\tau) = \Psi(s)$.

Preuve du lemme 2. Nous nous contentons ici de résumer la preuve de J.L. Doob de ce résultat classique (voir [Do], théorème 2.1, p. 437).

Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu sur Ω_ε engendrée par $X_0, \ldots, X_n$. On observe que $(\Psi(X_{\tau \wedge n}); \mathcal{F}_n)$ est une martingale, de sorte que la suite des espérances $\mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n})$ est constante, donc:

$$\mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n}) = \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge (n-1)}) = \cdots = \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge 0}) = \mathbf{E}_s \Psi(X_0) = \Psi(s) .$$

D'autre part, comme S_ε^K est fini, la suite de fonctions $\Psi(X_{\tau \wedge n})$ est bornée, de sorte que le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n}) = \int_{\{\tau < +\infty\}} \Psi(X_\tau)\, dP_s .$$

Comme $\tau \leqslant \tau_{B_\varepsilon^K}$ qui est presque sûrement fini, on en déduit

$$\Psi(s) = \mathbf{E}_s \Psi(X_\tau) . \quad \square$$

Terminons la preuve de la proposition. Soit $v \in S_\varepsilon^K$ un sommet voisin de s, et τ_v le temps d'arrêt défini par:

$$\tau_v(\omega) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } X_n(\omega) = v\} .$$

On applique le lemme 2 au temps d'arrêt $\tau = \tau_v \wedge \tau_{B_\varepsilon^K}$ et à la fonction ψ_ε de l'énoncé de la proposition. Il vient:

$$\psi_\varepsilon(s) = \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_\varepsilon(X_\tau)\, dP_s = \int_{\{\tau = \tau_v\}} \psi_\varepsilon(X_{\tau_v})\, dP_s + \int_{\{\tau = \tau_{B_\varepsilon^K}\}} \psi_\varepsilon(X_{\tau_{B_\varepsilon^K}})\, dP_s .$$

Comme ψ_ε est positive et que $X_{\tau_v} = v$, on en déduit:

$$\psi_\varepsilon(s) \geqslant \psi_\varepsilon(v) \times P_s\{\tau = \tau_v\} .$$

Il reste donc à mesurer l'écart à 1 de $P_s\{\tau = \tau_v\}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Fixons le sommet $v \in I_\varepsilon^K$, et considérons la fonction Φ donnée par $\Phi(s) = P_s\{\tau = \tau_v\}$: c'est la probabilité qu'une marche aléatoire partant de s atteigne v avant le bord. On observe que $\Phi(v) = 1$, que $\Phi(s) = 0$ si $s \in s \in B_\varepsilon^K$ et que Φ est harmonique sur S_ε^K sauf en v et sur B_ε^K.

Nous allons donner une interprétation électrique de Φ. Considérons un circuit électrique de combinatoire $\mathscr{C}_\varepsilon^K$ (i.e. la trace de $\mathscr{C}_\varepsilon$ sur K) tel que la conductance de l'arête ss' soit $-c_{ss'}^\varepsilon$. Si on branche tous les sommets de B_ε^K au potentiel 0 et le sommet v au potentiel 1 alors le potentiel au sommet s n'est autre que $\Phi(s)$ (voir [D-S], p. 47). En égalant la puissance dissipée par le circuit et la puissance fournie par le générateur (voir [D-S], p. 61), on a:

$$\frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} -c_{ss'}^\varepsilon [\Phi(s) - \Phi(s')]^2 = C_{\text{eff}}^{v,B} [\Phi(v) - \Phi(B)]^2 = \frac{1}{R_{\text{eff}}^{v,B}}$$

où $C_{\text{eff}}^{v,B}$ (resp. $R_{\text{eff}}^{v,B}$) désigne la conductance effective (resp. résistance effective) du circuit entre v et le bord $B = B_\varepsilon^K$.

Il reste à évaluer $R_{\text{eff}}^{v,B}$. C'est l'objet du

LEMME 3. *Il existe une constante $c_1(\tilde{K})$ ne dépendant que de $\tilde{K}$ telle que $\forall v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$, $R_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \frac{-\operatorname{Log}\varepsilon}{c_1(\tilde{K})}$.*

Ce lemme termine la preuve de la proposition. En effet, pour tous sommets $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ et $s \in S_\varepsilon^K$ voisin de v, on a:

$$\frac{1}{2} A [\Phi(v) - \Phi(s)]^2 \leqslant \frac{1}{R_{\text{eff}}^{v,B}} \leqslant \frac{c_1(\tilde{K})}{-\operatorname{Log}\varepsilon}$$

de sorte que $1 - P_s\{\tau = \tau_v\} \leqslant \frac{c}{\sqrt{-\operatorname{Log}\varepsilon}}$ avec $c = \sqrt{\frac{2c_1(\tilde{K})}{A}}$, ce qui est bien l'estimation annoncée.

Preuve du lemme 3. On compare le circuit électrique étudié au circuit standard de combinatoire $\mathscr{C}_\varepsilon^K$ pour lequel les résistances de toutes les arêtes sont égales à 1. On note $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B}$ la résistance effective du circuit standard entre v et $B = B_\varepsilon^K$. D'après le principe de Dirichlet (voir [D-S], p. 63-64) on a:

$$\frac{1}{R_{\text{eff}}^{v,B}}$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} - c_{ss'}^{\varepsilon} [\varphi(s) - \varphi(s')]^2 \mid \varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon^K}, \varphi = 0 \text{ sur } B_\varepsilon^K, \varphi(v) = 1 \right\}$$

et

$$\frac{1}{\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B}} = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} [\varphi(s) - \varphi(s')]^2 \mid \varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon^K}, \varphi = 0 \text{ sur } B_\varepsilon^K, \varphi(v) = 1 \right\}.$$

Compte tenu des estimations $0 < A \leqslant - C_{ss'}^{\varepsilon} \leqslant B$, on a:

$$\forall v \in I_\varepsilon^K, \quad A \leqslant \frac{\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B}}{R_{\text{eff}}^{v,B}} \leqslant B .$$

La fin de la preuve du lemme 3 repose sur les deux lemmes suivants. On commence par évaluer $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B}$ dans un cas particulier.

LEMME 4. *Si $\mathscr{C}_\varepsilon^K$ est isomorphe à la triangulation d'un hexagone régulier de côté N par des triangles équilatéraux unités et si v est le centre de $\mathscr{C}_\varepsilon^K$, alors on a:*

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{Log} N .$$

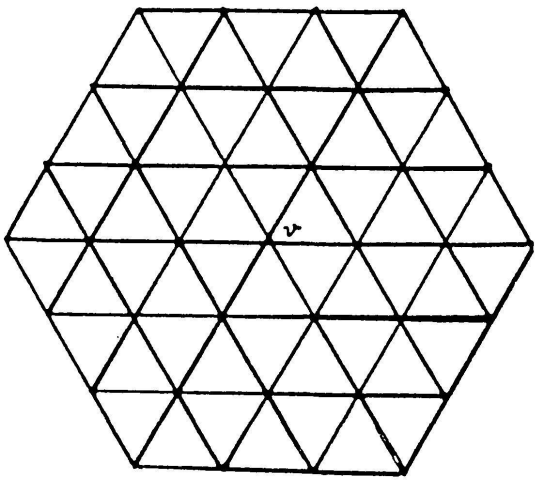

FIGURE 3
La triangulation $\mathscr{C}_\varepsilon^K$ avec $N = 3$

Preuve du lemme 4. D'après la loi de monotonie de Rayleigh ([D-S], p. 67), si l'une des résistances du circuit standard diminue, alors la résistance $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B}$ diminue. Remplaçons toute résistance joignant deux sommets à même distance combinatoire de v par la résistance nulle, de sorte que, pour tout $k \in \{1, 2, ..., N\}$, les sommets à distance combinatoire k de v sont au même potentiel. Le circuit standard ainsi diminué est équivalent au circuit suivant (cf. fig. 4):

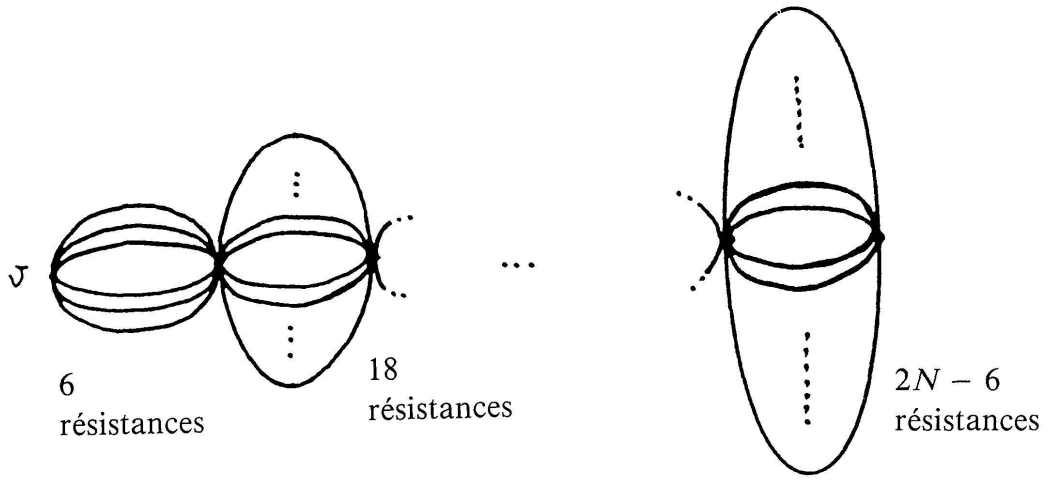

FIGURE 4
Le circuit standard diminué

Comme n résistances de 1 Ohm en parallèle sont équivalentes à une résistance de $\frac{1}{n}$ Ohm, la résistance du circuit ci-dessus entre ses deux extrémités est égale à $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{12k-6}$ car il y a $12k - 6$ résistances entre la $k-1^{\text{e}}$ et la k^{e} génération.

La résistance effective du circuit non modifié vérifie donc:

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{12k-6} \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{Log} N .$$

LEMME 5. *Soit $d(v)$ le rayon de la plus grande boule combinatoire de centre v et contenu dans S_{ε}^{K}.*

Alors on a $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{Log} d(v)$.

Preuve du lemme 5. $\mathscr{C}_{\varepsilon}^{K}$ contient une sous-triangulation, isomorphe à la triangulation d'un hexagone régulier de côté $d(v)$ par des triangles équilatéraux unités, dont le centre est v, et dont le bord est noté B'. En remplaçant toutes les résistances en dehors de ce sous-circuit par des résistances nulles,

on amène le bord B' au potentiel 0. Toujours d'après la loi de monotonie de Rayleigh, on a alors:

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{Log} d(v) ,$$

la dernière inégalité résultant du lemme 4. □

Fin de la preuve du lemme 3. Soit $\tilde{K}$ le compact de l'énoncé de la proposition. Rappelons qu'il est contenu dans l'intérieur de K. Notons δ la distance hyperbolique de $\tilde{K}$ à $\mathbf{D}^2 \setminus K$. Pour tout sommet $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ on a $d(v) \geqslant \frac{\delta}{\varepsilon}$, donc $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geqslant -\frac{1}{12} \operatorname{Log} \delta\varepsilon$, ce qui est bien le résultat cherché. □

VII. Commentaires

1. Sur l'inégalité de Harnack

L'estimation obtenue ici en $\frac{1}{\sqrt{-\operatorname{Log}\varepsilon}}$ n'est ni optimale, ni propre aux réseaux récurrents, comme la preuve peut le laisser penser. Les résultats les plus significatifs ont été obtenu par Gregory Lawler (voir [La1] et [La2]). Soit u une fonction de $\mathbf{Z}^d$ dans $\mathbf{R}$. On pose

$$\Delta_0 u(x) = u(x) - \frac{1}{2d} \sum_{s \sim x} u(s)$$

(la somme est étendue à tous les voisins de x dans le réseau $\mathbf{Z}^d$).

Théorème 1. *Il existe une constante C telle que si u est une fonction harmonique (pour Δ_0) positive sur la boule combinatoire de $\mathbf{Z}^d$ de centre 0 de rayon N, alors*

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leqslant \frac{C}{N}.$$

Dans le cas de la dimension 3, ce théorème avait déjà été démontré par R.J. Duffin ([Du]) dans les années cinquante. Dans [L1], G. Lawler étudie également les opérateurs à coefficients variables:

Théorème 2. *Soit A, B deux réels vérifiant $0 < A < B$. Il existe alors deux réels C et $\alpha, \alpha \in]0,1[$, qui ne dépendent que de A, B et d, et possédant la propriété suivante:*

Soit L *un opérateur de la forme* $Lu(s) = c_s u(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} u(s')$ *opérant sur les fonctions numériques définies sur* $\mathbf{Z}^d$ *et dont les coefficients vérifient:* $A \leqslant c_s \leqslant B$, $A \leqslant -c_{ss'} \leqslant B$, $c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0$ *et* $c_{ss'} = c_{ss''}$ *où* s'' *est le symétrique de* s' *par rapport à* s. *Alors si* u *est une fonction définie sur la boule combinatoire de* $\mathbf{Z}^d$ *de centre* 0 *de rayon* N, *telle que*

$$Lu = 0 \quad et \quad u \geqslant 0 ,$$

on a

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leqslant \frac{C}{N^\alpha} .$$

On notera que la condition de symétrie sur les coefficients n'est pas celle d'un laplacien discret (à savoir $c_{ss'} = c_{s's}$).

2. Sur le théorème de Rodin-Sullivan

Nous citons ici deux généralisations du théorème de Rodin-Sullivan. Soit $\mathscr{C}^1$ le 1-squelette d'une triangulation $\mathscr{C}$ d'un disque topologique et $\mathscr{P}$ un empilement de cercles de combinatoire $\mathscr{C}^1$ plongé isométriquement dans $\mathscr{U}$. Notons $\tilde{\mathscr{P}}$ l'empilement d'Andreev associé à $\mathscr{P}$ normalisé comme au début de II. On note $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}$ (resp. $\mathscr{C}_{\tilde{\mathscr{P}}}$) la réalisation géométrique de $\mathscr{C}$ définie par $\mathscr{P}$ (resp. $\tilde{\mathscr{P}}$), et $f_{\mathscr{P}} : \mathscr{C}_{\mathscr{P}} \to \mathscr{C}_{\tilde{\mathscr{P}}}$ l'application affine par morceaux qui envoie de manière affine chaque triangle de $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}$ sur son correspondant dans $\mathscr{C}_{\tilde{\mathscr{P}}}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que la distance de Hausdorff $d_{\mathscr{H}}(\partial \mathscr{C}_{\mathscr{P}}, \partial \mathscr{U})$ soit $\leqslant \varepsilon$ ainsi que tous les rayons des cercles de $\mathscr{P}$. On a le

Théorème 1. *S'il existe une constante* C *telle que pour tous cercles* c, c' *de* $\mathscr{P}$,

$$\frac{1}{C} \leqslant \frac{\text{rayon}(c)}{\text{rayon}(c')} \leqslant C .$$

Alors $f_{\mathscr{P}}$ *converge uniformément sur les compacts de* $\mathscr{U}$ *vers l'uniformisation de Riemann* f *de* $\mathscr{U}$, *lorsque* ε *tend vers* 0.

Ce théorème a été obtenu en premier par Kenneth Stephenson en 1991 (voir [St1] et [St2]). Sa preuve repose sur le lemme de Schwarz-Pick discret de [B-St2] et le théorème de récurrence de Pólya.

En 1993, Zheng-Xu He et Burt Rodin ont montré comme le résultat de rigidité de Rodin-Sullivan permettait de prouver le théorème 1 (voir [He-R]). Ils obtiennent également la même conclusion sous des hypothèses plus faibles:

THÉORÈME 2. *On suppose que les valences des empilements* $\mathscr{P}$ *sont bornées par un entier positif* k_0.

Alors $f_{\mathscr{P}}$ *converge vers* f *uniformément sur les compacts de* $\mathscr{U}$ *lorsque* ε *tend vers* 0.

Leur méthode repose sur des arguments développés par He dans [He].

Rajouté sur épreuves: Laurent Saloff-Coste a récemment amélioré l'inégalité de Harnack (voir [Sa]). Quant au théorème de Rodin-Sullivan, il a été considérablement généralisé par Zheng-Xu He et Oded Schramm (voir [He-Sc]).

BIBLIOGRAPHIE

[Ahl] AHLFORS, L. *Lectures on quasi-conformal mappings.* Van Nostrand, 1982.

[An] ANDREEV, E.M. On convex polyhedra in Lobaĉevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik 10* (1970), 413-440.

[B] BEARDON, A. *The geometry of discrete groups.* Springer Verlag, 1983.

[B-St1] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. The uniformisation theorem for circle packings. *Indiana University Math. J. 39 (No. 4)* (1990), 1383-1425.

[B-St2] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. The Schwarz-Pick lemma for circle packings. *Ill. J. of Math. 35 (No. 4)* (1991), 577-606.

[B-St3] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. Circle packings in different geometries. *Tôhoku Math. J. 43* (1991), 27-36.

[CV] COLIN DE VERDIÈRE, Y. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent. Math. 104* (1991), 655-669.

[CV-M] COLIN DE VERDIÈRE, Y. et F. MATHÉUS. Empilements de cercles et approximations conformes. A paraître dans les Actes de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'honneur de Marcel Berger, Arthur L. Besse (éditeur), Collection SMF *Séminaires et Congrès N° 1,* 1996.

[Do] DOOB, J.L. Discrete potential theory and boundaries. *Journal of Math. and Mech. 8* (1959), 433-458.

[D-S] DOYLE, P.-G. and J.-L. SNELL. *Random walks and electrical networks.* The Carus Math. Monographs, Math. Assoc. of America, 1984.

[Du] DUFFIN, R.-J. Discrete potential theory. *Duke Math. Journal 20* (1953), 233-251.

[Ha] HANSEN, L.-J. On the Rodin and Sullivan ring lemma. *Complex variables, Theory and applications 10* (1988), 23-30.

[He] HE, Z.-X. An estimate for hexagonal circle packings. *J. of Differential Geom. 33* (1991), 395-412.

[He-R] HE, Z.X. and B. RODIN. Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mapping. *Communications in Analysis and Geometry 1 (1)* (1993), 31-41.

[He-Sc] HE, Z.X. and O. SCHRAMM. On the convergence of circle packings to the Riemann map. Preprint, 1995.

[Ko] KOEBE, P. Kontaktprobleme der konformen Abbildung. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse 88* (1936), 141-164.

[La1] LAWLER, G.-F. Estimates for differences and Harnack inequality for difference operators coming from random walks with symmetric, spatially inhomogeneous, increments. *Proc. London Math. Soc. (3) 63* (1991), 552-568.

[La2] —— *Interactions of Random Walks.* Birkhäuser, 1991.

[M] MATHÉUS, F. Empilements de cercles: rigidité, discrétisation d'immersions conformes. Thèse de doctorat de l'Université de Grenoble I, 1994.

[Ma-R] MARDEN, A. and B. RODIN. On Thurston's formulation and proof of Andreev's Theorem. *In: Computational Methods and Function theory.* (Ruschewegh, Saff, Salines, Varga, eds.) Lecture Notes in Math. Springer-Verlag 1435 (1990), 103-115.

[R] RODIN, B. On a problem of A. Beardon and K. Stephenson. *Indiana Univ. Math. Journal 40 (N° 1)* (1991), 271-275.

[R-S] RODIN, B. and D. SULLIVAN. The convergence of circle packings to the Riemann mapping. *J. of Diff. Geometry 26* (1987), 349-360.

[Sa] SALOFF-COSTE, L. Some inequalities for superharmonic functions on graphs. Preprint, 1995.

[Sp] SPITZER, F. *Principles of Random Walks.* Graduate texts in Math., Springer-Verlag, 1976.

[St 1] STEPHENSON, K. Circle packings in the approximation of conformal mappings. *Bull. Amer. Math. Soc. 23* (Oct. 90), Research Announcements).

[St 2] —— Thurston's conjecture on circle packings in the non hexagonal case. Preprint, University of Tennessee (Knoxville), 1991.

[St 3] STEPHENSON, K. A probabilistic proof of Thurston's conjecture on circle packings. Preprint, 1993.

[Th1] THURSTON, W. *The geometry and topology of 3-manifolds.* Princeton notes, Chap. 13, 1978.

[Th2] —— The finite Riemann mapping theorem. Invited talk, An international Symposium at Purdue University on the occasion of the proof of the Bieberbach Conjecture, March 1985.

(Reçu le 2 février 1995)

Frédéric Mathéus

ENS Lyon
UMPA
UMR 128
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07
E-mail: fmatheus@umpa.ens-lyon.fr