2. Exemples

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

avec mineurs 3×3 (considérés avec leur signe) notés $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, telle que

$$T = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4]\,;$$

2. T est dite de *de Jonquières* si $\widetilde{T^{-1}(L)}$ est une courbe cubique plane;
3. T est dite *réglée* si $\widetilde{T^{-1}(H)}$ est une surface cubique réglée.

On note $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ les ensembles des transformations de bidegré (3,3) qui sont déterminantielles, de de Jonquières et réglées respectivement.

Voici le résultat principal de ce travail, qui est démontré plus loin au §3.

THÉORÈME 1.2. $\mathbf{T}_{3,3} = \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$.

2. EXEMPLES

EXEMPLE 2.1. Comme on l'a vu, l'application rationnelle

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz]$$

est de Cremona de bidegré $(3,3)$. On constate qu'elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -w & -w & -w \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2.2. L'application rationnelle

$$T = [xz^2, yz^2, zw^2, w^3]$$

est une transformation de bidegré (3,3) avec inverse

$$T^{-1} = [xw^2, yw^2, z^3, z^2w]\,.$$

C'est une transformation réglée: en effet, le transformé strict d'un plan générique a l'équation

$$z^2(ax + by) + w^2(cz + dw) = 0\,,$$

qui est évidemment l'équation d'une surface réglée.

LEMME 2.3. *Notons $\mathcal{M}$ l'idéal engendré par x, y, z. Soient q, g des polynômes homogènes des degrés 2 et 3 respectivement tels que $q \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{M}^2$ et $qg \notin \mathcal{M}^5$. Supposons g irréductible. Alors l'application rationnelle $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ définie par*

$$T = [xq, yq, zq, g]$$

est une transformation de de Jonquières.

Preuve. En effet, prenons un plan générique d'équation

$$ax + by + cz + dw = 0\,;$$

son transformé strict est donc la surface cubique $S_{a,b,c,d}$ d'équation

$$q(ax + by + cz) + dg = 0\,,$$

qui est aussi irréductible. D'une part les conditions sur q et g impliquent que le point $P_0 = [0, 0, 0, 1]$ est un point double de $S_{a,b,c,d}$; d'autre part la restriction de T à $S_{a,b,c,d}$ est (la restriction d') une projection de centre P_0 sur un plan : si $s\colon \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^3$ est l'automorphisme associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

la restriction de $s \circ T$ à $S_{a,b,c,d}$ est une projection de centre P_0 sur le plan $w = 0$. On en déduit que T est birationnelle du type de de Jonquières puisque la transformée stricte d'une droite générique est une section plane par P_0 d'une surface cubique avec un point double en P_0. $\square$

On montre dans [13, cor. 3.3.7] que $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} = \varnothing$. Cependant $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \neq \varnothing$ et $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \neq \varnothing$ comme il ressort des exemples qui suivent.

EXEMPLE 2.4. Considérons les applications rationnelles

$$T = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2] \text{ et } T' = [x^3, x^2y, x^2z, x^2z - y^2w]\,.$$

D'une part T est involutive, donc de Cremona de bidegré (3,3); elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} x & w & 0 \\ -y & 0 & z \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$$

et évidemment réglée. D'autre part, T' est une transformation de de Jonquières par le lemme 2.3 et aussi réglée.

EXEMPLE 2.5. Dans [13, chap. 4] on montre que la partie de dimension 1 de l'ensemble des points base d'une transformation réglée est de l'une des formes : une droite, deux droites concourantes, trois droites concourantes non coplanaires et trois droites non coplanaires dont l'une s'appuie sur les deux autres. Voici un exemple de chaque cas :

$$T_1 = [xy^2, y^3, zx^2, wx^2],$$
$$T_2 = [x^3, x^2y, zxy, wy^2],$$
$$T_3 = [x^2y, xy^2, z(y^2 - x^2), xyw],$$
$$T_4 = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2];$$

avec pour inverses respectives :

$$T_1^{-1} = [x^3, yx^2, zy^2, wy^2],$$
$$T_2^{-1} = [xy^2, y^3, zxy, wx^2],$$
$$T_3^{-1} = [x(y^2 - x^2), y(y^2 - x^2), zyx, w(y^2 - x^2)],$$
$$T_4^{-1} = T_4 .$$

3. PREUVE DU THÉORÈME

Deux lemmes sont nécessaires pour démontrer le résultat principal.

Rappelons pour commencer que sur une variété normale W, on dispose de la notion de système linéaire sans composante fixe associé à un diviseur de Weil : se donner un tel système linéaire Λ de dimension l revient à se donner une application rationnelle $\phi\colon W \dashrightarrow \mathbf{P}^l$ telle que le transformé strict d'un hyperplan générique de $\mathbf{P}^l$ est un élément générique de Λ ; de plus, l'ensemble des points base de Λ coïncide avec l'ensemble des points où ϕ n'est pas définie (voir [10]).