5. Homogeneous polynomials

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Homogeneous polynomials

Generalizing Theorem 1 to include homogeneous polynomials introduces subtle difficulties, which we address in the following proof.

Proof of Theorem 2. Let K and L be as in the proof of Theorem 1. We set $\pi_n = y - qx\zeta_n$ and $\pi = N_{L/K}(\pi_n)$ and note $p = N_K(\pi)$ with the assumption $s > 0$. Now let a be an integer dividing x, and decompose a as $a = a'q^k$ where a' is not divisible by q. Let $y' = N_{L/K}(y) = y^{[L:K]}$. We remark that $\pi \equiv y' \mod qa$ since $\pi_n \equiv y \mod qa$.

We can now apply reciprocity. We are interested in evaluating the symbol $(a/\pi)_l$. We can use reciprocity laws (5) and (6) along with multiplicativity from Theorems 5(a) and 6(a) in the following manner. We have

$$\left(\frac{a}{\pi}\right)_l = \left(\frac{a'}{\pi}\right)_l \left(\frac{q}{\pi}\right)_l^k = \left(\frac{\pi}{a'}\right)_l (\pi, a')_l (\pi, q)_l^k = \left(\frac{\pi}{a'}\right)_l (\pi, a)_l .$$

Now $\pi \equiv y' \mod a'$ so $(\pi/a')_l = (y'/a')_l$ by Theorem 5(c). And letting $(y')^{-1}$ denote the q-adic inverse of y' in $\mathbf{Z}_q$, we have

$$(\pi, a)_l = (\pi(y')^{-1}, a)_l (y', a)_l .$$

Let $\pi' = \pi(y')^{-1}$. Now $\pi' \equiv 1 \mod qa$. So $\pi' \equiv 1 \mod q$, and if q divides a, then $\pi' \equiv 1 \mod q^2$. Thus the fact that λ_q^2 divides q implies $\pi' \equiv 1 \mod \mathfrak{f}_l(a)$ by Corollary 8. Thus $(\pi', a)_l = 1$.

We now have that

$$\left(\frac{a}{\pi}\right)_l = \left(\frac{y'}{a'}\right)_l (y', a)_l .$$

The symbol $(y'/a')_l$ is an l-th root of unity, and by Theorem 5(d) an element $\sigma \in G_K$ acts on it as follows:

$$\sigma\left(\frac{y'}{a'}\right)_l = \left(\frac{\sigma y'}{\sigma a'}\right)_l = \left(\frac{y'}{a'}\right)_l ,$$

since a' and y' are rational integers. Since l is odd, the only such root of unity fixed under the action of the Galois group is 1. In the same manner, Theorem 6(h) enables us to see that $(y', a)_l = 1$. We therefore conclude that $(a/\pi)_l = 1$. $\square$