ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE

Autor(en): **Trang, LÊ Dung / WEBER, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-63285

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 355–380

ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE

par LÊ Dung Trang et Claude WEBER [1])

§ 1. INTRODUCTION

Soient f_0 et f_1 deux germes de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$. On suppose que les deux germes s'annulent à l'origine et sont à singularité isolée. Traditionnellement on dit que f_0 et f_1 sont *topologiquement équivalents* s'il existe un germe d'homéomorphisme $\Phi\colon (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ de degré $+1$, tel que l'on ait $f_0 \circ \Phi = f_1$.

On peut démontrer que les deux germes sont topologiquement équivalents si et seulement si les entrelacs orientés qui leur sont associés dans une petite sphère de Milnor sont isotopes. Voir [Saeki] et les références qui s'y trouvent.

Dans [E-N] D. Eisenbud et W. Neumann donnent une façon de coder l'entrelacs de Milnor associé à un germe f par un diagramme d'épissure (« splicing diagram »), qui est une version plus élaborée des anciens câblages.

Une autre façon de se donner le type topologique de l'entrelacs de Milnor consiste à utiliser l'arbre de la résolution minimale de f. Ce faisant, on décrit la configuration du lieu exceptionnel de la résolution en indiquant comment les composantes irréductibles se coupent et quelle est la self-intersection de chaque composante. On indique en plus, par des flèches en quantité adéquate, combien de fois chaque composante est coupée par la transformée stricte de $f = 0$. Pour plus de détails voir [B-K].

Dans tout ceci, le fait que les germes sont à singularité isolée n'est pas essentiel. Pour décrire la topologie d'un germe à singularité non isolée il convient d'indiquer pour chaque composante de l'entrelacs (resp. pour

[1]) Les auteurs remercient le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique de son soutien financier.

chaque flèche) quelle est la multiplicité d'un point générique de la branche correspondante dans l'équation $f = 0$. Ceci conduit aux entrelacs pondérés (« multilinks » chez Eisenbud-Neumann).

Soient maintenant $h_1 = 0$ et $h_2 = 0$ deux germes de courbes planes s'annulant à l'origine, sans branche commune. La famille de germes de courbes planes $w_2h_1 - w_1h_2 = 0$ avec $w = (w_1 : w_2) \in \mathbf{P}^1$ est par définition le *pinceau de germes de courbes planes* engendré par h_1 et h_2. Un cas particulier d'un théorème général sur les déformations (dû à O. Zariski) affirme qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $\Omega \subset \mathbf{P}^1$ tel que les éléments correspondants du pinceau ont tous la même topologie. L'ouvert maximal ayant cette propriété s'appelle *l'ouvert d'équisingularité du pinceau*, tandis que son complémentaire est l'ensemble (fini) des *valeurs spéciales*.

Dans la première partie de ce travail, nous énonçons et démontrons un théorème (théorème 4.1) qui caractérise explicitement l'ensemble des valeurs spéciales en fonction de la résolution minimale du pinceau. Nous décrivons la résolution minimale au paragraphe 2 et parlons des valeurs génériques au paragraphe 3. La preuve du théorème (en fait sa partie la plus facile) permet de déterminer explicitement la topologie d'un membre générique du pinceau en fonction de la topologie (colorée) de l'entrelacs associé à $h_1h_2 = 0$. Voir la remarque à la fin du § 3.

La deuxième partie de ce travail (basée sur la première) est consacrée au degré de C^0-suffisance d'un germe de courbe plane. Voici de quoi il s'agit. Soit $f \in \mathbf{C}\{X, Y\}$ avec $f(0) = 0$. Le jet d'ordre r de f, noté $j^{(r)}(f)$, est dit topologiquement suffisant si, quel que soit $g \in \mathfrak{m}^{r+1}$, le germe f est topologiquement équivalent au germe $f + g$. Bien sûr, il existe une définition analogue pour les germes à n variables. Le *degré de C^0-suffisance* $\mathrm{Suff}(f)$ de f est le minimum des r tels que le jet $j^{(r)}(f)$ est topologiquement suffisant.

Soit maintenant $\pi\colon \Sigma \to \mathbf{C}^2$ la résolution minimale de f. Soit $E = \pi^{-1}(0)$ le lieu exceptionnel de la résolution. Choisissons une composante irréductible D de E. Une *curvette* de D en un point $P \in D$ lisse dans la transformée totale de $f = 0$ est un germe γ en P de courbe lisse et transverse à D. Ce germe est la transformée stricte d'une branche (c'est-à-dire d'une composante analytiquement irréductible) γ_* en l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel positif égal à $I(f = 0, \gamma_*)/I(\lambda, \gamma_*)$ où λ est une droite transverse à $f = 0$ et à γ_*. Ici $I(-,-)$ désigne le nombre d'intersection de deux germes à l'origine. Il est facile de voir que ce nombre ne dépend que de la composante D.

DÉFINITION. Une composante D de E est appelée une *composante de rupture* si elle rencontre au moins trois composantes de la transformée totale de $f = 0$ par π.

Le calcul du degré de C^0-suffisance est établi par le théorème suivant.

THÉORÈME 7.3. *Supposons que f est à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. Alors* Suff(f) *est égal au maximum des parties entières* $[q_D]$ *où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de E.*

REMARQUE. Le théorème 3.2 de [L-M-W2] (que nous appellerons théorème de croissance) implique qu'il suffit pour calculer Suff(f) de considérer les composantes de rupture D qui contiennent au moins un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$. Le nombre de composantes D à considérer est donc inférieur ou égal au nombre de branches de f. En particulier, il n'y a qu'un seul quotient d'Hironaka à calculer si f est analytiquement irréductible.

Notre approche est basée sur l'idée suivante (tellement simple qu'elle peut sembler trop naïve). Nous cherchons des conditions sur la multiplicité de g pour que les germes $f - \lambda g = 0$ du pinceau $\eta f - \lambda g = 0$ aient la même topologie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Pour cela, nous utilisons à fond la détermination de l'ouvert d'équisingularité faite dans la première partie de ce travail.

§2. ÉLIMINATION DE L'INDÉTERMINATION LOCALE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE À DEUX VARIABLES

Soit U un domaine (=ouvert connexe) de $\mathbf{C}^2$ contenant l'origine. Soient h_1 et $h_2 \colon U \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes, avec $h_i(0) = 0$ pour $i = 1, 2$. On suppose que l'origine est le seul zéro commun à h_1 et h_2 dans U.

Ceci étant posé, on considère la fonction $h = \frac{h_1}{h_2}$. La fonction méromorphe h est définie en tout point $z \in U$ différent de l'origine et peut être interprétée comme une application $h \colon U \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ définie par $h(z) = \big(h_1(z) : h_2(z)\big)$.

Pour chaque $w \in \mathbf{P}^1$, l'équation $w_2 h_1 - w_1 h_2 = 0$ définit un germe de courbe plane que l'on désignera par $h(z) = w$ ou par $h^{-1}(w)$. L'ensemble des germes $h(z) = w$ pour $w \in \mathbf{P}^1$ est le pinceau (local) de germes de courbes planes associé à la fonction méromorphe h.

Une *modification* de U (au-dessus de l'origine) est pour nous une composition de morphismes d'éclatements de points dont les centres se projettent sur l'origine. Une modification $\rho\colon \widehat{U} \to U$ telle que $h \circ \rho$ est un morphisme (c'est-à-dire est définie partout) est, par définition, une résolution de h. On dit aussi que ρ lève l'indétermination de h. En termes de pinceaux, dire que ρ est une résolution signifie que les courbes $(h \circ \rho)^{-1}(w)$ et $(h \circ \rho)^{-1}(w')$ sont disjointes si w est distinct de w'. Autrement dit, on a « résolu » la famille de germes $\{h(z) = w\}$ dans l'ancien sens du verbe « résoudre » qui veut dire « diviser en ses parties constituantes ».

Nous allons montrer que, pour toute fonction méromorphe telle que h, il existe des résolutions. Parmi celles-ci, il y en a une qui est minimale et que nous décrirons. Un tel énoncé est connu depuis des décennies. Nous en proposons une démonstration qui a l'avantage d'être géométriquement très explicite. La démonstration elle-même joue un rôle clef dans la suite de ce travail.

Pour l'instant, considérons une modification quelconque $\rho\colon \widehat{U} \to U$. L'ensemble $\rho^{-1}(0)$ est appelé le *lieu exceptionnel* de la modification. Soit D une composante irréductible du lieu exceptionnel. Pour $i = 1, 2$ on définit $v_i(D)$ comme étant la multiplicité de $h_i \circ \rho$ le long de D. Posons $v(D) = v_1(D) - v_2(D)$. Si $v(D)$ est strictement positif, D appartient au support du diviseur Z des zéros de $h \circ \rho$. Si $v(D)$ est strictement négatif, D appartient au diviseur P des pôles de $h \circ \rho$. Autrement dit, on a $(h \circ \rho) = (h_1 \circ \rho) - (h_2 \circ \rho) = Z + P$. Une composante D du lieu exceptionnel de ρ est dite *dicritique* si la restriction $h \circ \rho|_D$ est non constante. Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que D soit dicritique est que $v(D)$ soit égal à zéro. Si $v(D) = 0$ sans que D soit dicritique, la restriction de la fonction $h \circ \rho$ à D est constante, de valeur différente de 0 et de l'infini ∞.

PROPOSITION 2.1. *Il existe une résolution de h.*

Preuve de la proposition 2.1. Considérons la fonction holomorphe $h_1 h_2\colon U \to \mathbf{C}$. Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ une modification de U qui résout la singularité de $h_1 h_2$ à l'origine. Voir par exemple [B-K] §8.4. Soit $\big((h_1 h_2) \circ \rho\big)^{-1}(0)$ la transformée totale et soit S son support. Les points d'indétermination de $h \circ \rho$ sont situés au point d'intersection Q de deux composantes S_1 et S_2 de S pour lesquelles on a $v(S_1) > 0$ et $v(S_2) < 0$. Définissons alors la complexité du point Q comme étant $c(Q) = |v(S_1) + v(S_2)|$. Éclatons le point Q. Soit

S_3 le lieu exceptionnel de ce nouvel éclatement et soit ρ' la projection de l'éclatement de Q suivie de ρ. Soit $v(S_3)$ la multiplicité de la fonction $h \circ \rho'$ le long de S_3. On a $v(S_3) = v(S_1) + v(S_2)$. Soit Q_i le point d'intersection de (la transformée stricte de) S_i avec S_3 pour $i = 1, 2$.

Si $v(S_3) = 0$, aucun des deux points Q_i n'est d'indétermination (et en fait S_3 est une composante dicritique). Si $v(S_3) > 0$ alors Q_2 est un point d'indétermination; tandis que si $v(S_3) < 0$ c'est Q_1 qui est d'indétermination. Mais, de toute façon, la complexité du nouveau point d'indétermination est strictement inférieure à $c(Q)$.

En un nombre fini d'éclatements on résout donc la singularité en Q. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points d'indétermination tels que Q, ceci achève la preuve de la proposition 2.1.

Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ une résolution de h et soit Δ l'ensemble de ses composantes dicritiques.

DÉFINITION. Une résolution de h est dite *minimale* si les composantes du lieu exceptionnel qui n'appartiennent pas à Δ sont de self-intersection différente de -1.

Supposons que la résolution $\rho\colon \widehat{U} \to U$ de h n'est pas minimale. Soit D une composante du lieu exceptionnel dont la self-intersection vaut -1. Par définition, la restriction de $h \circ \rho$ à D est constante. Par conséquent, la modification $\rho'\colon U' \to U$ obtenue à partir de ρ en contractant D est encore une résolution de h. En revanche, on n'aurait plus une résolution de h si l'on contractait une composante dicritique de self-intersection -1. En effet, le point image du dicritique dans le contracté est un point d'indétermination puisque la restriction de la fonction au dicritique est non-constante.

PROPOSITION 2.2. *Il existe une résolution minimale et cette résolution est unique à isomorphisme près.*

Preuve de la proposition 2.2. L'existence résulte immédiatement de ce que nous venons de faire. En effet, il suffit de prendre la résolution fournie par la preuve de la proposition précédente et de contracter, tant qu'il en reste, les composantes non dicritiques de self-intersection -1. (La résolution construite dans la preuve de la proposition précédente n'est pas nécessairement minimale.)

L'unicité résulte d'arguments bien connus de la théorie des surfaces complexes. Une bonne référence est fournie par le livre de H. Laufer; voir [La] à partir de la page 87. Le fait que l'auteur s'intéresse à la résolution des singularités normales de surfaces plutôt qu'à la résolution des fonctions méromorphes n'est pas essentiel. □

REMARQUE. Le théorème d'unicité permet de donner un sens à la phrase suivante: «Deux résolutions de h ont les "mêmes" composantes dicritiques». En effet, on passe d'une résolution à une autre par une suite finie d'éclatements et de contractions sans toucher aux composantes dicritiques.

§3. VALEURS SPÉCIALES D'UN PINCEAU DE GERMES DE COURBES PLANES

Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de la fonction méromorphe h. Posons $\hat{h} = h \circ \rho$.

DÉFINITION. L'ensemble (fini) des *valeurs spéciales* de h est formé:

i) des valeurs $\hat{h}|_{D_a}$ où D_a parcourt l'ensemble des composantes non dicritiques de $E = \rho^{-1}(0)$. Remarquer que la restriction de $\hat{h}$ à D_a est constante par définition.

ii) des valeurs critiques de $\hat{h}|_{D_b}$ où D_b parcourt l'ensemble des composantes dicritiques de E.

iii) des valeurs $\hat{h}(Q)$ où Q est un point d'intersection entre deux dicritiques.

Par définition une valeur non spéciale est *générique*. Si w est une valeur générique, le germe de courbe $h^{-1}(w)$ est, par définition, un membre générique du pinceau. Sinon, c'est un membre spécial.

AFFIRMATION 1. *N'importe quelle résolution de h est une résolution du germe de courbe $h^{-1}(w)$ pour w générique.*

En fait on a mieux:

AFFIRMATION 2. *N'importe quelle résolution de h est une résolution de n'importe quel germe $\bigcup_{i=1}^{m} h^{-1}(w^i)$ où les w^i sont m valeurs génériques deux à deux distinctes.*

Preuve des deux affirmations. Si w est une valeur générique, par définition $(\hat{h})^{-1}(w)$ ne rencontre aucune composante D_a non dicritique. Soit alors D_b une composante dicritique et soit $z \in D_b$ un point d'intersection de $(\hat{h})^{-1}(w)$ avec D_b. En vertu de la condition iii) portant sur les valeurs spéciales, le point z est un point lisse de D_b dans E. Comme la restriction $\hat{h}|_{D_b}$ n'a pas de point critique en z, la courbe $(\hat{h})^{-1}(w))$ est lisse et transverse à D_b en z.

Le même argument démontre aussi l'affirmation 2, car si w est distinct de w' les points de contact de $(\hat{h})^{-1}(w)$ avec D_b sont nécessairement distincts de ceux de $(\hat{h})^{-1}(w')$ avec D_b puisque $\hat{h}$ n'a plus de point d'indétermination.

L'affirmation suivante se démontre en suivant un raisonnement semblable.

AFFIRMATION 3. *La résolution minimale de h est la résolution minimale d'un germe $h^{-1}(w) \cup h^{-1}(w')$ où w et w' sont deux valeurs génériques distinctes.*

REMARQUE. Nous venons de voir que la résolution minimale de h est (entre autres choses) une résolution de n'importe quel germe générique. En revanche, elle n'est pas nécessairement une résolution d'un germe spécial. Maintenant, supposons que h_1 et h_2 sont des germes génériques du pinceau. Alors la résolution construite dans la preuve de la proposition 2.1 est la résolution minimale de h si l'on démarre avec la résolution minimale de h_1h_2. Si le germe h_1 (et/ou le germe h_2) est spécial, la résolution de la proposition 2.1 n'est pas nécessairement minimale. A posteriori, on constate qu'elle l'est si et seulement si h_1 (et/ou h_2) sont résolus par la résolution minimale de h).

Soit maintenant $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de h construite au paragraphe 2.

PROPOSITION 3.1. *Les composantes dicritiques de* $E = \rho^{-1}(0)$ *sont les composantes* D *telles que:*

1. $v(D) = 0$.

2. D *rencontre au moins une composante* D' *de support de* Z *et une composante* D'' *du support de* P.

Preuve. Les conditions sont nécessaires. En effet, si D est dicritique, D ne peut appartenir ni au support des zéros ni au support des pôles, ce qui implique que $v(D) = 0$. Comme la restriction de $\hat{h}$ à une composante dicritique D est nécessairement surjective (puisque non constante et holomorphe) la valeur 0 et la valeur ∞ sont prises par $\hat{h}|_D$.

Réciproquement, nous savons déjà que $v(D) = 0$ implique soit que D est dicritique, soit que la restriction $\hat{h}|_D$ est constante et de valeur distincte de 0 ou de ∞. La condition 2 rend impossible la deuxième branche de l'alternative. □

REMARQUES.

1) La preuve indique que la composante D est dicritique si et seulement si $v(D) = 0$ et D rencontre le support de Z ou le support de P.

2) La proposition précédente a un certain intérêt pratique. Il est facile en effet de construire des fonctions méromorphes où toutes les composantes du lieu exceptionnel de la résolution minimale ont valuation v nulle.

La remarque suivante est une parenthèse dans cet article. Elle résulte immédiatement du paragraphe 2 et de la proposition précédente.

REMARQUE. Soient h_1 et $h_2 \colon U \to \mathbf{C}$ comme au §2. Tautologiquement, h_1 et h_2 déterminent le pinceau qu'elles engendrent ! Mais ce que nous venons de faire démontre ceci. La topologie locale de $h_1 h_2 = 0$ (où l'on colore les composantes de $h_1 = 0$ d'une certaine couleur et celles de $h_2 = 0$ d'une autre couleur; nous parlerons dans ces circonstances de *topologie colorée*) détermine la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. Par h_{gen} on désigne un membre générique du pinceau (équipé d'une troisième couleur). De plus le procédé que nous avons donné est effectif. Entre autres choses, la topologie de h_{gen} peut être déterminée effectivement à partir de la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$. De même, la topologie colorée de $h_1 h_2 h^1_{\text{gen}} \dots h^m_{\text{gen}} = 0$ est déterminée, où les h^i_{gen} sont m membres génériques, deux à deux distincts, du pinceau. Finalement, observons que tout ceci fonctionne si les générateurs h_i $(i = 1, 2)$ du pinceau ne sont pas réduits.

Nous conseillons au lecteur de faire des tests sur quelques exemples. Voir aussi le paragraphe 6 (surtout la fin).

§4. L'OUVERT D'ÉQUISINGULARITÉ D'UN PINCEAU LOCAL

Dans ce paragraphe, nous donnons une preuve détaillée du théorème suivant, qui caractérise l'ouvert d'équisingularité d'un pinceau local.

THÉORÈME 4.1. *Soient h_1 et h_2 comme au début du paragraphe 2. Soient w et w' deux points de $\mathbf{P}^1$. Alors:*

1. *Les germes $h^{-1}(w)$ et $h^{-1}(w')$ ont même topologie si w et w' sont génériques.*

2. *Les germes $h^{-1}(w)$ et $h^{-1}(w'')$ n'ont pas la même topologie si w est générique et si w'' est spécial.*

Commençons par énoncer une proposition qui est un cas particulier d'un phénomène bien plus général.

PROPOSITION 4.2. *Soient h_1 et h_2 comme au début du paragraphe 2. Alors il existe un ouvert non-vide $\Omega \subset \mathbf{P}^1$ ayant les propriétés suivantes:*

1. *Si w et $w' \in \Omega$ les germes $h^{-1}(w)$ et $h^{-1}(w')$ ont la même topologie.*

2. *Si $w \in \Omega$ et si $w'' \notin \Omega$ les germes $h^{-1}(w)$ et $h^{-1}(w'')$ n'ont pas la même topologie.*

DÉFINITION. L'ouvert Ω est appelé *l'ouvert d'équisingularité du pinceau.*

COMMENTAIRE. Le théorème 4.1 affirme que l'ouvert d'équisingularité coïncide avec l'ouvert des valeurs génériques (ce dernier étant défini comme le complémentaire de l'ensemble des valeurs spéciales, définies au début du §3). Un point important est que l'on a affaire à un ouvert (de Zariski).

Soit $\mu\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ la fonction qui associe à chaque $w \in \mathbf{P}^1$ le nombre de Milnor du germe $h^{-1}(w)$, en convenant que le nombre de Milnor d'un germe non réduit vaut $+\infty$.

LEMME 4.3. *La fonction μ est semi-continue supérieurement.*

Preuve du lemme 4.3. Rappelons que la semi-continuité supérieure signifie ceci. Pour tout $w \in \mathbf{P}^1$ il existe un ouvert W contenant w, tel que pour tout $w' \in W$ on ait $\mu(w) \geq \mu(w')$.

Fixons $w \in \mathbf{P}^1$. Soit S une petite sphère de Milnor pour le germe $h^{-1}(w)$. Rappelons que l'équation de ce germe est $f_w = w_2 h_1 - w_1 h_2 = 0$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$. Posons $\partial_i(f_w) = \frac{\partial f_w}{\partial z_i}$ pour $i = 1, 2$.

Le nombre μ de Milnor est le nombre d'intersection à l'origine de $\partial_1(f_w) = 0$ avec $\partial_2(f_w) = 0$. Maintenant, quitte à restreindre S, on peut supposer que S est aussi une sphère de Milnor pour le germe $\big(\partial_1(f_w)\big)\big(\partial_2(f_w)\big) = 0$. Par le théorème de Lefschetz, μ est aussi le coefficient d'enlacement dans S de l'entrelacs orienté $\big(\partial_1(f_w) = 0\big) \cap S$ avec l'entrelacs $\big(\partial_2(f_w) = 0\big) \cap S$.

Si w' est proche de w, $\partial_i(f_{w'}) = 0$ coupe S transversalement ($i = 1, 2$) et le coefficient d'enlacement dans S des entrelacs associés est égal à celui de $\partial_i(f_w) = 0$ (invariance du coefficient d'enlacement par homotopie). Toujours par le théorème de Lefschetz, le coefficient d'enlacement dans S de $\big(\partial_1(f_{w'}) = 0\big) \cap S$ avec $\big(\partial_2(f_{w'}) = 0\big) \cap S$ est égal à la somme des nombres d'intersection de $\partial_1(f_{w'}) = 0$ avec $\partial_2(f_{w'}) = 0$ en leur divers points d'intersection dans la boule B dont le bord est la sphère S. Comme ces nombres d'intersection sont strictement positifs, on a bien l'inégalité annoncée si l'on considère le nombre d'intersection de

$$\partial_1(f_{w'}) = 0 \quad \text{avec} \quad \partial_2(f_{w'}) = 0$$

en l'origine. $\square$

Preuve de la proposition 4.2. Soit $\mu_{\min}$ la valeur minimum prise par la fonction $\mu\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Il résulte de la semi-continuité que l'ensemble des $w \in \mathbf{P}^1$ tels que $\mu(w) = \mu_{\min}$ est un ouvert (non-vide) que nous notons Ω.

Le théorème μ-constant de Lê (pour les germes de courbes planes) dit que pour tous les $w \in \Omega$, les germes $h^{-1}(w)$ ont la même topologie. Voir [Lê].

Finalement, pour $w \in \Omega$ et pour $w'' \notin \Omega$, la topologie de $h^{-1}(w)$ ne peut être celle de $h^{-1}(w'')$ puisque les nombres μ de Milnor sont différents. Ceci résulte du théorème de J. Milnor et V. Palamadov qui affirme que la codimension de l'idéal jacobien est égale au premier nombre de Betti de la fibre de Milnor. Voir [Mil] appendice B et [Pala]. $\square$

Poursuivons nos préparatifs en vue de démontrer le théorème 4.1. Soient à nouveau h_1 et h_2 comme au début du paragraphe 2. Dans $U \times \mathbf{P}^1$ considérons la surface Σ d'équation $\eta h_1 - \lambda h_2 = 0$. La restriction à Σ des deux projections de $U \times \mathbf{P}^1$ sur chacun des facteurs fournit deux morphismes $P\colon \Sigma \to U$ et $h'\colon \Sigma \to \mathbf{P}^1$ tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "h'"] & \\ U \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbf{P}^1. \end{tikzcd}$$

Le morphisme P est l'éclatement de l'idéal engendré par h_1 et h_2. Il est facile de voir que $P|_{P^{-1}(U-\{0\})} \to U - \{0\}$ est un isomorphisme tandis que $P^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^1$. Par conséquent, P lève l'indétermination de h et c'est la façon la plus « économique » de le faire. Mais le « hic » est que Σ est une surface très singulière qui n'est pas normale en général.

Nous allons maintenant comparer $P\colon \Sigma \to U$ avec la résolution minimale $\rho\colon \widehat{U} \to U$ construite au paragraphe 2.

Pour cela, considérons le lieu exceptionnel $E = \rho^{-1}(0)$. Dans E, soit Δ la réunion des composantes dicritiques. Considérons ensuite la différence $E - \Delta$ et son adhérence $\mathrm{ad}(E - \Delta)$. Cette dernière est l'union disjointe de ses composantes connexes $C_1, \ldots, C_k$. La configuration de chaque C_i est représentée par un sous-graphe connexe (en fait un arbre) de l'arbre de configuration de E. Après tout, $\rho\colon \widehat{U} \to U$ peut être considérée comme une résolution du point lisse $0 \in U$. Par le théorème de P. du Val et D. Mumford, la forme intersection associée à E est négative définie. Voir [H-N-K] p. 86. Par restriction, la forme intersection associée à chaque C_i est aussi négative définie.

Soit alors $\overline{\Sigma}$ le quotient de $\widehat{U}$ obtenu en identifiant chaque C_i en un point (disons P_i). Par le théorème de H. Grauert, $\overline{\Sigma}$ peut être muni d'une (unique) structure d'espace analytique normal. (Voir [Gr].) Par construction, la restriction de $\hat{h}$ à chaque C_i est constante. On en déduit que $\hat{h}$ passe au quotient et fournit un morphisme $\bar{h}\colon \overline{\Sigma} \to \mathbf{P}^1$. Pour la même raison, on a un morphisme $n\colon \overline{\Sigma} \to \Sigma$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \overline{\Sigma} \arrow[d, "n"'] \arrow[dr, "\bar{h}"] & \\ \Sigma \arrow[r, dashed, "h'"] & \mathbf{P}^1. \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 4.4. $n\colon \overline{\Sigma} \to \Sigma$ est la normalisation de Σ.

Preuve de la proposition 4.4. Par construction, l'espace analytique $\overline{\Sigma}$ est normal. Il est facile de vérifier que n est un morphisme fini et est un isomorphisme en restriction à un ouvert dense de points lisses. (Voir [Lo].) $\square$

Observons que dans la courbe C_i aucune composante irréductible n'a self-intersection égale à -1, par minimalité de la résolution ρ. On en déduit que chaque point $P_i \in \overline{\Sigma}$ est un point vraiment singulier et que $\{P_i\}$ pour $i = 1, \ldots, k$ est la liste complète des points singuliers de $\overline{\Sigma}$. Par conséquent, la projection $q\colon \widehat{U} \to \overline{\Sigma}$ est la résolution minimale des singularités de $\overline{\Sigma}$. En résumé, nous obtenons donc le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5. *Il y a un grand diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{U} \arrow[d, "q"'] \arrow[ddr, "\hat{h}"] & \\
\overline{\Sigma} \arrow[d, "n"'] & \\
\Sigma \arrow[d, "P"'] & \\
U \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbf{P}^1 ,
\end{tikzcd}$$

où n est la normalisation de Σ et où q est la résolution minimale des singularités de $\overline{\Sigma}$.

Preuve du théorème 4.1. Soient donc w et w' deux valeurs génériques. Il est clair que $h^{-1}(w)$ et $h^{-1}(w')$ ont la même topologie. En effet, leurs transformées strictes par la résolution minimale ρ de h passent uniquement par les composantes dicritiques, qu'elles rencontrent de façon lisse et transverse. De plus, pour une composante dicritique D donnée, le nombre de points de contact de la transformée stricte de $h^{-1}(w)$ avec D est égal au nombre de points de contact de la transformée stricte de $h^{-1}(w')$ avec D. En effet, ces deux nombres sont égaux au degré de l'application $\hat{h}|_D \to \mathbf{P}^1$. Les deux germes ont donc la même résolution et, par conséquent la même topologie.

Soient maintenant w'' une valeur spéciale et w une valeur générique. Par construction $h^{-1}(w'')$ et $h^{-1}(w)$ n'ont pas la même résolution. Mais il se pourrait tout de même que leurs arbres de résolution soient isomorphes. Nous allons montrer (et c'est là l'essentiel de la démonstration du théorème) qu'il n'en est rien.

1er cas. Soit D_a une composante irréductible de $E = \rho^{-1}(0)$ telle que la restriction de $\hat{h}$ à D_a soit constante. Soit $w_a \in \mathbf{P}^1$ la valeur $\hat{h}(D_a)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $w_a \in \Omega$.

Tout d'abord, nous avons observé précédemment que Ω est un ouvert de $\mathbf{P}^1$. Par construction tous les germes $h^{-1}(w)$ pour $w \in \Omega$ ont même topologie. La théorie de O. Zariski pour l'équisingularité des germes de courbes planes assure qu'il existe un homéomorphisme $\Psi\colon (h')^{-1}(\Omega) \to \Omega \times \Gamma$ où Γ est le germe de $h^{-1}(w)$ pour un w quelconque appartenant à Ω. Voir [Zar]. De plus, Ψ est tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} (h')^{-1}(\Omega) & \overset{\Psi}{\dashrightarrow} & \Omega \times \Gamma \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Omega & \end{array}$$

On en déduit que, topologiquement, $(\bar{h})^{-1}(\Omega)$ est isomorphe à $\Omega \times \overline{\Gamma}$, où $\overline{\Gamma} \to \Gamma$ est la normalisation de Γ.

Par conséquent si $w_a \in \Omega$, alors $(\bar{h})^{-1}(\Omega)$ est topologiquement lisse. Mais c'est impossible, car $(\bar{h})^{-1}(\Omega)$ contient l'un des points P_i, image par contraction d'une composante connexe de $\mathrm{ad}(E - \Delta)$. Nous avions observé précédemment que P_i est vraiment singulier, ce qui implique que P_i n'est pas topologiquement lisse, via le théorème de D. Mumford. Voir [Mum].

2e cas. Supposons maintenant que w'' est une valeur spéciale qui n'est pas une valeur constante prise par $\hat{h}$ en restriction à une composante de E. Dans ces conditions, on a le lemme suivant.

LEMME 4.6. *Le nombre de branches de $h^{-1}(w'')$ est inférieur ou égal au nombre de branches d'un germe générique.*

Preuve du lemme 4.6. Soit D_b une composante dicritique de E. Soit d_b le degré de la restriction de $\hat{h}$ à D_b. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, il est clair qu'un germe générique possède exactement $\sum d_b$ branches, la somme portant sur l'ensemble des composantes dicritiques de E.

Maintenant, par hypothèse sur w'', la transformée stricte de $h^{-1}(w'')$ ne rencontre E qu'aux composantes dicritiques. Pour estimer le nombre de branches de $h^{-1}(w'')$ plaçons-nous en un point de contact $x \in D_b$ de la transformée stricte de $h^{-1}(w'')$ avec D_b. Soit $\deg(\hat{h}|_{D_b}; x)$ le degré local en x de la restriction $\hat{h}|_{D_b}$. Ce degré est égal au nombre d'intersection en x de D_b avec $\hat{h}^{-1}(w'')$. Or, ce nombre d'intersection est inférieur ou égal au nombre de branches en x de $\hat{h}^{-1}(w'')$. Comme d_b est égal à $\sum_x \deg(\hat{h}|_{D_b}; x)$ (la somme portant sur tous les points de contact x de $\hat{h}^{-1}(w'')$ avec D_b) le lemme est démontré. $\square$

REMARQUES SUR LA PREUVE DU LEMME 4.6.

1. Supposons que D_b et $D_{b'}$ sont deux composantes dicritiques distinctes et que $D_b \cap D_{b'} = \{Q\}$. Supposons que $w'' = \hat{h}(Q)$. Alors le nombre de branches de $h^{-1}(w'')$ est strictement inférieur au nombre générique de branches. En effet, dans la formule d'Hurwitz les branches de $h^{-1}(w'')$ en Q interviennent à la fois pour D_b et pour $D_{b'}$.

2. Il y a égalité entre le nombre de branches de $h^{-1}(w'')$ et le nombre générique de branches si et seulement si :

i) w'' n'est pas égal à $\hat{h}(Q)$ pour un point Q qui est intersection de deux dicritiques.

ii) en chaque point de contact de la transformée stricte de $h^{-1}(w'')$ avec un dicritique, cette transformée stricte est composée de branches lisses, toutes transverses au dicritique.

Dans tous les cas où il y a inégalité stricte, la démonstration du théorème est achevée car, banalement, deux germes topologiquement équivalents ont le même nombre de branches.

Reste donc finalement le cas où il y a égalité entre les nombres de branches. Alors un calcul direct basé sur la méthode de C. Clemens et N. A'Campo (voir [A'C]) montre que le nombre μ de Milnor de $h^{-1}(w'')$ est strictement supérieur au μ générique. Plus précisément, on a le résultat suivant.

LEMME 4.7. *Soit w'' une valeur spéciale satisfaisant les conditions de la remarque 2 ci-dessus. Alors la différence entre le μ de Milnor μ'' de $h^{-1}(w'')$ et le μ générique μ_{gen} est donnée par $\mu'' - \mu_{\text{gen}} = \sum(c_x + \mu_x - 1)$ la somme portant sur tous les points de contact x de la transformée stricte de $h^{-1}(w'')$ avec les dicritiques. Le nombre c_x est le nombre de branches en x et μ_x est le μ de Milnor du germe de courbe en x.*

REMARQUE SUR LA PREUVE DU THÉORÈME 4.1. On pourrait objecter à la démonstration que nous venons de donner qu'elle traite un peu légèrement le cas des germes du pinceau qui ne sont pas réduits. Supposons donc que $w \in \mathbf{P}^1$ est tel que le germe $h(z) = w$ n'est pas réduit. Il est facile de voir que w est une valeur spéciale. On affirme que $w \notin \Omega$. Il y a pour cela tout d'abord une raison idéologique. En effet, la topologie d'un germe non nécessairement réduit est représentée par un entrelacs dont chaque composante est affectée d'un poids entier > 0 qui représente la multiplicité d'un point générique de la branche correspondant à la composante considérée. Comme un germe générique est réduit, l'entrelacs avec poids correspondant à $h(z) = w$

ne peut pas être isomorphe à l'entrelacs d'un germe générique. Mais en fait l'entrelacs réduit d'un germe non réduit ne peut pas non plus être isomorphe à l'entrelacs d'un germe générique. En effet, s'il existe une composante D_a de E telle que la restriction de $\hat{h}$ à D_a est constante, la démonstration donnée s'applique sans changement. Sinon, comme au moins une branche du germe $h(z) = w$ est non réduite, la preuve du lemme 4.6 montre que ce germe a un nombre de branches strictement inférieur au nombre de branches d'un germe générique.

REMARQUE SUR LE THÉORÈME 4.5. On a vu que P est l'éclatement de l'idéal (h_1, h_2) engendré par h_1 et h_2. On sait alors que la composition $P \circ n$ de P avec la normalisation $n\colon \overline{\Sigma} \to \Sigma$ est aussi l'éclatement d'un idéal qui n'est autre que la clôture intégrale I de l'idéal (h_1, h_2) dans l'anneau analytique local régulier de dimension deux $\mathcal{O}_{U,o}$. Au sens de Zariski-Samuel (voir l'appendice 5 de [Z-S]) l'idéal I est un idéal complet. Par définition (voir [Sp]) les singularités de $\overline{\Sigma}$ sont des singularités sandwich. Notre construction donne à partir de la résolution de $h_1 h_2$ la résolution minimale de ces singularités sandwich. Inversément, si $I \subset \mathcal{O}_{U,o}$ est un idéal complet et si h_1 et h_2 sont des éléments superficiels de I (voir [Z-S] vol. 2, p. 285) tels que la multiplicité de l'idéal (h_1, h_2) est égale à celle de I, un théorème de Rees montre que I est la clôture intégrale de (h_1, h_2). De ceci résulte que toutes les singularités sandwich sont obtenues après normalisation d'un système linéaire de germes de courbes planes.

§ 5. BONNES COMPOSANTES DICRITIQUES

Comme indiqué dans l'introduction, notre point de vue sur la C^0-suffisance est le suivant. Le germe f étant donné, nous cherchons une condition sur la multiplicité de g pour que les germes $f - \lambda g = 0$ aient tous la même topologie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Considérant le pinceau $\eta f - \lambda g = 0$ nous cherchons donc à savoir quand son ouvert d'équisingularité Ω contient $\mathbf{C} = \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$.

REMARQUE. Il découle facilement de la description des valeurs spéciales donnée au paragraphe 4 que l'ouvert d'équisingularité d'un pinceau est égal à $\mathbf{P}^1$ tout entier si et seulement si :

1. le pinceau est résolu en un seul éclatement;
2. le degré de $\hat{h}|_D \to \mathbf{P}^1$ est égal à 1, où D est le dicritique créé par l'éclatement.

Ces deux conditions reviennent à dire que l'on a affaire à un pinceau de courbes lisses à tangentes distinctes.

En dehors de ce cas banal, tous les pinceaux ont un ouvert d'équisingularité strictement contenu dans $\mathbf{P}^1$. Nous nous intéressons donc au cas où l'ouvert Ω est « le plus gros possible », c'est-à-dire consiste en $\mathbf{P}^1$ privé d'un point (qui est en l'occurrence le point $\infty \in \mathbf{P}^1$). On pourrait nommer de tels pinceaux « presque équisinguliers ».

Pour reconnaître ces pinceaux, revenons au germe de fonction méromorphe $h\colon U \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ défini au début du paragraphe 2. Voici une façon un peu différente de définir les valeurs spéciales (voir le début du paragraphe 3). Considérons la résolution minimale de h et soit D_b une de ses composantes dicritiques. Associons à D_b le sous-ensemble fini $S_b \subset \mathbf{P}^1$ formé :

1. des valeurs critiques de la restriction $\hat{h}|_{D_b}$;

2. des valeurs $\hat{h}(Q)$ pour chaque point d'intersection Q de D_b avec une autre composante du lieu exceptionnel.

On démontre facilement l'affirmation suivante.

AFFIRMATION. *L'ensemble des valeurs spéciales de h est égal à la réunion $\bigcup_b S_b$ où b parcourt l'ensemble des composantes dicritiques $\{D_b\}$ de la résolution minimale de la fonction h.*

DÉFINITION. Nous dirons que la composante dicritique D_b est *bonne* si $S_b = \{\infty\}$.

REMARQUE. Nous choisissons l'adjectif « bon » par commodité de langage, mais aussi parce que les composantes bonnes sont étroitement liées aux polynômes bons à l'infini (« good ») de W. Neumann et L. Rudolph. Voir [Neu] et [L-W].

La démonstration du lemme suivant découle facilement du théorème 4.1.

LEMME 5.1. *La composante dicritique D_b est bonne si et seulement si :*

1. *le degré de $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$ vaut 1 ;*

2. *la composante D_b ne rencontre qu'une seule autre composante D du lieu exceptionnel et l'on a $\hat{h}(Q) = \infty$ où $Q = D_b \cap D$.*

Dans le paragraphe 7, nous déterminons le degré de C^0-suffisance d'un germe f en cherchant à quelle condition sur la multiplicité de g les composantes dicritiques de $h = \frac{f}{g}$ sont toutes bonnes.

§6. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

Considérons le germe de fonction méromorphe donné par $k(x,y) = \frac{x^v}{y^u}$ où u et v sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. La résolution minimale de $k(x,y)$ est donnée par la processus suivant. On écrit $u = ru'$ et $v = rv'$ avec $\mathrm{pgcd}(u',v') = 1$. On construit l'approximation lente de $\frac{u'}{v'}$. Pour plus de détails sur ce procédé, voir [L-M-W2] début de l'appendice. Le point de départ est fourni par le développement en fraction continue de $\frac{u'}{v'}$ donné par:

$$u'/v' = h^0 + \cfrac{1}{h^1 + \cfrac{1}{h^2 + \cdots + \cfrac{1}{h^s}}}$$

où l'on a $0 \leq h^0$, $1 \leq h^i$ pour $1 \leq i \leq s-1$, $2 \leq h^s$. Posons $m = \sum_{i=0}^{s} h^i$.

LEMME 6.1.

1. *Il y a exactement une composante dicritique et c'est la composante obtenue après m éclatements. Elle correspond précisément au nombre rationnel $\frac{u'}{v'}$ de l'approximation lente.*

2. *La transformée stricte de $y^u = 0$ est une curvette de la composante qui correspond au sommet le plus à gauche. La transformée stricte de $x^v = 0$ est une curvette du sommet le plus à droite.*

3. *Le degré de la restriction de $\hat{k}$ à la composante dicritique est égal à $r = \mathrm{pgcd}(u,v)$.*

4. *Les sommets qui sont à gauche de la composante dicritique ont valuation < 0 tandis que ceux qui sont à droite ont valuation > 0.*

Conséquence du lemme 6.1 (importante pour la suite). La composante dicritique est bonne si et seulement si $u = 1$. En effet $u = 1$ est équivalent à:

1. $r = 1$, i.e. le degré de la restriction de $\hat{k}$ au dicritique est égal à 1.

2. Les composantes du lieu exceptionnel qui rencontrent le dicritique ont valuation < 0 (en fait il n'y a qu'une composante du lieu exceptionnel qui rencontre le dicritique).

Preuve du lemme 6.1. On observe qu'il ne s'agit de rien d'autre que de construire la résolution de $x^v - y^u = 0$. Concrètement, en utilisant les calculs du début de l'appendice de [L-M-W2] on vérifie qu'en un sommet $\frac{a}{b}$ de l'approximation lente, la valuation de $\hat{k}$ sur la composante qui correspond à ce sommet vaut $av - bu$. Elle s'annule donc uniquement au sommet $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$. Les sommets qui sont à droite de $\frac{u'}{v'}$ satisfont l'inégalité $\frac{u'}{v'} < \frac{a}{b}$ tandis que ceux qui sont à gauche satisfont $\frac{a}{b} < \frac{u'}{v'}$. $\square$

Utilisation du lemme 6.1. Revenons au paragraphe 2 et à la méthode proposée pour éliminer les indéterminations de $h = \frac{h_1}{h_2}$. Dans la résolution minimale de $h_1 h_2 = 0$ les éventuels points d'indétermination se trouvent au point d'intersection du diviseur Z des zéros avec le diviseur P des pôles. Localement, la situation est exactement celle du lemme. On obtient donc une résolution de h en insérant à la place du point d'indétermination le lieu exceptionnel donné par le lemme 6.1. Le point 2 du lemme dit exactement comment se fait le recollement. L'entier $-u$ est le coefficient dans P de la composante de P qui passe par le point d'indétermination tandis que v est le coefficient de la composante de Z qui passe par le point d'indétermination. Ceci complète ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 3. Connaissant la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$ (par exemple via sa résolution minimale) on peut déterminer *effectivement* la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. En effet, la valuation de $\hat{h}$ le long de chaque composante du lieu exceptionnel se calcule par les moyens habituels. Elle peut, par exemple, se ramener à un calcul de coefficients d'enlacement. Ensuite, chaque point d'indétermination est remplacé par le segment décrit par le lemme 6.1. Finalement, on obtient une résolution de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$ en ajoutant, en plus des flèches colorées de $h_1 h_2 = 0$ des flèches d'une troisième couleur à chaque dicritique D_b en nombre égal au degré de l'application $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$.

§7. Le calcul du degré de C^0-suffisance

Soit $\pi : \Sigma \to U$ la résolution minimale de f. Soit D une composante irréductible de $\pi^{-1}(0)$ et soit γ une curvette de D. Rappelons qu'il s'agit d'un germe de courbe lisse, transverse à D en un point de D qui est lisse dans la transformée totale de $f = 0$ par π. Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel $q_D = I(f, \gamma_*)/I(l, \gamma_*)$; dans cette formule l représente une droite transverse à $f = 0$ et γ_* est l'image de γ par π (voir le paragraphe 1).

La formule classique pour le calcul du nombre d'intersection implique immédiatement que l'on a $I(f, \gamma_*) = \mathrm{val}_D(f \circ \pi)$ et $I(l, \gamma_*) = \mathrm{val}_D(l \circ \pi)$. Par conséquent, on a aussi $q_D = \mathrm{val}_D(f \circ \pi)/\mathrm{val}_D(l \circ \pi)$.

Soit maintenant N un entier > 0. La composante D appartient au diviseur des pôles de la fonction méromorphe $h \circ \pi$, où $h = f(x, y)/l(x, y)^{N+1}$ si et seulement si $\mathrm{val}_D(f \circ \pi)/\mathrm{val}_D(l^{N+1} \circ \pi) < 1$. Autrement dit, si et seulement si $q_D < N + 1$.

LEMME 7.1. *Supposons qu'on a $q_D < N+1$ pour toutes les composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$. Alors on a $q_D \leq N + 1$ pour toutes les composantes de $\pi^{-1}(0)$. De plus, l'égalité ne peut avoir (éventuellement) lieu qu'en une composante D^0 de $\pi^{-1}(0)$ qui ne rencontre qu'une seule autre composante de $\pi^{-1}(0)$ et où passe exactement une composante de la transformée stricte de f par π. (Nous dirons que D^0* satisfait la condition *C.)*

Pour démontrer le lemme 7.1 nous aurons besoin d'un théorème de croissance. Pour énoncer ce dernier, il est plus confortable d'avoir recours à *l'arbre dual R de la résolution π*. Nous renvoyons au §3 de [L-M-W2] pour le vocabulaire qui s'y rattache. Remarquons aussi que la composante de $\pi^{-1}(0)$ obtenue par éclatement de l'origine de $\mathbf{C}^2$ (c'est-à-dire celle qui porte le numéro 1) est la composante où s'attache la transformée stricte de l par π. Le *théorème de croissance* s'énonce alors ainsi.

THÉORÈME 7.2. *Soit α une arête de R, d'extrémités D et D'. Supposons que D est plus proche de la composante numéro 1 que D'. Alors on a $q_D \leq q_{D'}$. De plus, l'inégalité est stricte si et seulement si en parcourant l'arête α en allant de D vers D', on se rapproche d'au moins une composante de la transformée stricte de $f = 0$ (autrement dit, si l'on se rapproche d'au moins une flèche).*

Pour une *preuve du théorème 7.2* voir le théorème 3.2 et son corollaire 3.3 de [L-M-W2].

Preuve du lemme 7.1. On remarque pour commencer qu'une composante de $\pi^{-1}(0)$ où passe au moins une composante de la transformée stricte de $f = 0$ n'est pas une composante de rupture si et seulement si elle satisfait la condition C.

S'il n'existe pas de telle composante, le maximum des q_D où D parcourt l'ensemble des composantes de $\pi^{-1}(0)$ est égal au maximum des q_D où D

parcourt seulement l'ensemble des sommets de rupture, à cause du théorème de croissance. Le lemme 7.1 est donc démontré dans ce cas.

Préoccupons-nous donc des composantes satisfaisant la condition C. L'archétype d'une telle situation est fourni par les singularités d'équation $y(y^q - x^p) = 0$ avec $p > q$ (et $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$ si l'on veut). Il est amusant de constater que T. C. Kuo dans [Kuo1] p. 226 a également dû traiter avec un soin particulier ces mêmes singularités. En un sens, ce sont celles pour lesquelles la valeur donnée pour le degré de C^0-suffisance est la plus « limite ». La résolution minimale d'une telle singularité est donnée par le processus d'approximation lente donné plus haut. Il y a deux composantes de $\pi^{-1}(0)$ où passe (au moins) une composante de la transformée stricte. L'une D' correspond au nombre rationnel p/q. L'autre D'' correspond au nombre rationnel (en fait entier) $h^0 + 1$, où h^0 est la partie entière de p/q. C'est cette dernière composante qui satisfait la condition C.

On a $q_{D'} = p + \frac{p}{q}$ et $q_{D''} = p + h^0 + 1$. On voit qu'en prenant $N = p + \left[\frac{p}{q}\right]$ l'égalité est atteinte en D'', puisque $h^0 = \left[\frac{p}{q}\right]$.

Le cas général se démontre de façon analogue, en utilisant les formules données dans [L-M-W2]. L'égalité n'est pas nécessairement atteinte. □

THÉORÈME 7.3. *Supposons f à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. Alors* Suff(f) *est égal au maximum des $[q_D]$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$ (π est la résolution minimale de $f = 0$).*

Preuve du théorème 7.3. Posons $N = \max_D \{[q_D]\}$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$. Dans un premier temps, il s'agit de montrer que $f - \lambda g = 0$ a la même topologie que f, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $g \in \mathfrak{m}^{N+1}$. La preuve est divisée en un certain nombre de cas.

1er cas: $g(x,y) = l^M(x,y)$ où $l(x,y) = 0$ est l'équation d'une droite transverse à $f(x,y) = 0$ et où $M \geq N + 1$.

Ceci est le cas exemplaire, qui rend particulièrement visible pourquoi le degré de C^0-suffisance a la valeur annoncée. Voir aussi la remarque à la fin de la preuve du théorème 7.3.

Les calculs que nous venons de faire montrent que toutes les composantes de $\pi^{-1}(0)$ sont dans les pôles de $h \circ \pi$ où $h = (f : l^M)$ sauf éventuellement pour certaines composantes satisfaisant la condition C (situation que nous traiterons un peu plus loin).

En chaque point de contact de la transformée stricte de f, nous avons un point d'indétermination de la fonction méromorphe $h \circ \pi$ lorsque l'inégalité

est stricte. En ce point, nous appliquons le lemme 6.1 à $h \circ \pi$ en observant que $u = 1$ *car la singularité est isolée*. C'est ici que cette hypothèse intervient ! Selon la remarque qui suit la preuve du lemme 6.1 toutes les composantes dicritiques obtenues sont bonnes.

Supposons maintenant que l'on a une composante D^0 satisfaisant la condition C, que $q_{D_0} = N+1$ et que $M = N+1$. Dans ce cas, cette composante est dicritique pour $h \circ \pi$. Mais elle est bonne car la seule composante de $\pi^{-1}(0)$ qu'elle rencontre est dans les pôles (théorème de croissance !) et le degré de la restriction de $h \circ \pi$ à D^0 vaut 1, puisque D^0 ne rencontre qu'une seule composante de la transformée stricte de $f = 0$.

2e cas : $g(x, y) \in \mathfrak{m}^M$ avec $M \geq N+1$ et la transformée stricte de g par π ne s'attache en aucun point de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

La démonstration est la même que dans le 1er cas. En effet, le calcul classique des multiplicités du diviseur $(g \circ \pi)$ montre qu'en chaque composante D de $\pi^{-1}(0)$ on a $\mathrm{val}_D(l^{N+1} \circ \pi) \leq \mathrm{val}_D(g \circ \pi)$.

3e cas : $g(x, y) \in \mathfrak{m}^M$ avec $M \geq N+1$, mais la transformée stricte de $g = 0$ par π s'attache en (au moins) un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

Soit Q un tel point. Il y a deux sous-cas 3a et 3b.

Cas 3a : La transformée stricte de g en Q ne contient pas ensemblistement la transformée stricte de $f = 0$. (Rappelons que π est la résolution minimale de f et donc la transformée stricte de $f = 0$ en Q est lisse et transverse au lieu exceptionnel.)

Éclatons le point Q. Nous obtenons une nouvelle composante D' et une nouvelle projection π' (qui remplace π). On a : $\mathrm{val}_{D'}(f \circ \pi') = \mathrm{val}_D(f \circ \pi) + 1$ et $\mathrm{val}_{D'}(g \circ \pi') = \mathrm{val}_D(g \circ \pi) + m$ avec $m > 0$. En un nombre fini d'éclatements on sépare g de f et l'on se retrouve dans la situation du 2e cas. Le fait que π' n'est pas minimale ne gêne pas.

Cas 3b : La transformée stricte de $g = 0$ en Q contient celle de $f = 0$. Autrement dit, on a une composante fixe.

Un calcul analogue au précédent montre que l'on peut commencer par faire des éclatements pour se ramener au cas où la transformée stricte de $g = 0$ est égale à celle de $f = 0$. En présence d'une composante fixe, il ne sert à rien de faire des éclatements. Choisissons plutôt des coordonnées locales en Q telles que $Y = 0$ soit l'équation du lieu exceptionnel et que $X = 0$ soit l'équation de la transformée stricte de f. Alors le pinceau local associé à $\frac{f}{g} \circ \pi$ s'écrit $\eta X - \lambda u X^m Y^n = 0$ où u est une unité en X et Y. Ici m est

un entier > 0. Le point important est que $n > 0$ même dans le cas où Q appartient à une composante D satisfaisant la condition C. La raison est que $\mathrm{val}_D(l^{N+1} \circ \pi) < \mathrm{val}_D(g \circ \pi)$ car g passe par Q tandis que l s'attache en la composante numéro 1. Ceci découle du calcul usuel des multiplicités pour les résolutions des singularités de courbes planes. On voit alors que le pinceau local en Q n'a que ∞ comme valeur spéciale. Ceci achève la preuve de la première partie du théorème 7.3.

Dans un deuxième temps, nous allons maintenant montrer que, si M est un entier > 0 strictement inférieur à $\max_D \{[q_D]\}$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$, alors le jet $j^{(M)}(f)$ n'est pas topologiquement suffisant.

Manifestement, il suffit de montrer que le pinceau $f(x,y) - \lambda l(x,y)^{M+1} = 0$ n'est pas équisingulier pour $\lambda \in \mathbf{C}$. (Comme précédemment $l(x,y) = 0$ est l'équation d'une droite transverse à $f(x,y) = 0$.)

Par hypothèse, il existe au moins une composante de rupture D' telle que $M+1 \leq q_{D'}$. Par le théorème de croissance, on peut supposer que D' contient des points de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

Supposons pour commencer que l'inégalité est stricte. Comme l est transverse à $f = 0$, la résolution minimale de $f = 0$ est aussi celle de $lf = 0$. La transformée stricte l' de l est dans le diviseur P des pôles de $(f : l^{M+1})$ tandis que, par hypothèse, la composante D' est dans le diviseur Z des zéros de h. Notons Γ la géodésique de l'arbre de la résolution minimale de f qui relie le sommet numéro 1 à D'. La démonstration de la proposition 2.1 indique que Γ contient des composantes dicritiques ou des points d'indétermination. (Les deux possibilités peuvent coexister.) En ce qui concerne les points d'indétermination, appliquons le procédé décrit dans le lemme 6.1. Nous obtenons une nouvelle géodésique Γ' qui relie le sommet numéro 1 à D'. Soit D'' la composante dicritique dans Γ' qui est la plus proche de D'. Alors, l'ensemble des valeurs spéciales S'' associé à D'' contient au moins une valeur distincte de ∞. En effet, par construction, D'' rencontre une composante D telle que $D'' \cap D = \{Q\}$ et $\hat{h}(Q) \neq \infty$.

S'il y a égalité $M + 1 = q_{D'}$ alors la composante D' est dicritique. Si D' rencontre des composantes de $\pi^{-1}(0)$ qui ne sont pas dans les pôles, on considère la valeur λ' prise par $\hat{h}$ au point d'intersection d'une de ces composantes avec D'. Par construction $\lambda' \neq \infty$ et l'on conclut comme ci-dessus. Si D' ne rencontre que des composantes qui sont dans les pôles, alors D' (qui est une composante de rupture) contient au moins 2 points de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

Par conséquent, le degré $\hat{h}|_{D'} \to \mathbf{P}^1$ est au moins égal à 2. La restriction de $\hat{h}$ à D' aura au moins une valeur critique distincte de ∞ (grâce au théorème de Hurwitz). Par conséquent $S_{D'}$ contient au moins une valeur distincte de ∞ et l'on conclut comme précédemment. Fin de la preuve du théorème 7.3.

REMARQUES FINALES.

1. La preuve du théorème 7.3 montre clairement que si f n'est pas à singularité isolée à l'origine, aucun jet $j^{(r)}(f)$ n'est suffisant (pour r fini). En effet, choisissons un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$ avec $\pi^{-1}(0)$ où cette transformée stricte n'est pas réduite.

Appliquons le lemme 6.1 pour $g = l(x,y)^N$ avec N grand et $h = \frac{f}{g}$. On voit que l'on a $u > 1$ car f n'est pas réduite. La remarque qui suit le lemme 6.1 indique que la composante dicritique créée par l'utilisation du lemme 6.1 n'est pas bonne. Il est facile de déterminer grâce au lemme 6.1 quel est le membre générique du pinceau ainsi créé (il dépend de l'entier N). Bien sûr, ce membre générique est à singularité isolée. Ceci donne un autre point de vue sur les résultats de H. Maugendre dans sa thèse. (Voir [Mau].)

2. Soit $l(x,y) = 0$ l'équation d'une droite transverse à $f(x,y) = 0$. La preuve du théorème 7.3 montre que le jet $j^{(r)}(f)$ est topologiquement suffisant si et seulement si $f - \lambda l^{r+1}$ est topologiquement équivalent à f pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Comparer avec B. Teissier dans [Tei2] p. 280.

§8. UN PETIT HISTORIQUE DE LA C^0-SUFFISANCE

Le concept de C^0-suffisance apparaît dans l'article de R. Thom au colloque de Bombay. (Voir [Thom].) Le rôle de l'inégalité de Lojasiewicz y est mis en évidence.

Au cours des années 1970-80, plusieurs auteurs (voir, entre autres, [Kuo2], [Bo-Lo], [Ch-Lu]) ont établi que $\mathrm{Suff}(f)$ est donné par l'inégalité de Lojasiewicz de la façon suivante. On considère les exposants $\theta > 0$ tels qu'il existe un voisinage U de l'origine et une constante $C > 0$ tels que l'on ait: $|\mathrm{grad}\ f(z)| \geq C|z|^\theta$ pour tout $z \in U$. La borne inférieure des θ ayant cette propriété est *l'exposant de Lojasiewicz* $\mathrm{Loja}(f)$. Le résultat obtenu par plusieurs auteurs est que $\mathrm{Suff}(f) = [\mathrm{Loja}(f)] + 1$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Dans [Kuo-Lu] T.C. Kuo et Y.C. Lu ont donné une façon explicite de calculer l'exposant de Lojasiewicz pour les germes de courbes planes, en utilisant les développements de Puiseux des branches de $f = 0$.

En 1975, B. Teissier a démontré (pour n quelconque) que Loja(f) est égal au maximum des invariants polaires $\frac{e_q}{m_q}$ selon sa définition des invariants polaires. Voir [Tei1] p. 626. A la même époque, il démontre directement que $\mathrm{Suff}(f) = \max\left\{\left[\frac{e_q}{m_q}\right]\right\}$. Voir [Tei2] p. 280. Dans [Mer] M. Merle a explicité une façon de calculer les invariants polaires pour les branches de courbes planes.

Dans [L-M-W1] et [L-M-W2] nous avons donné avec F. Michel une interprétation topologique des invariants polaires des courbes planes et une façon simple de les calculer à l'aide des quotients d'Hironaka (appelés alors coefficients d'insertion) de la résolution minimale de f. Dans le présent travail, nous avons donné une démonstration directe (pour les courbes planes) du fait que Suff(f) se calcule à partir des quotients d'Hironaka.

D'autres points de vue sur Suff(f) pour les courbes planes sont exprimés dans [B.Li] et [Cos].

Finalement, au chapitre 7 de son livre [Cas], E. Casas-Alvero détermine également le degré de C^0-suffisance d'un germe de courbe plane par le biais des pinceaux. Son étude est basée sur la théorie des points infiniment voisins à la Enriques, développée dans les premiers chapitres de son livre.

Nous terminons ce paragraphe en comparant les valeurs obtenues pour Suff(f) par quelques auteurs, pour aider le lecteur à s'y retrouver. Les invariants polaires $\frac{e_q}{m_q}$ de B. Teissier sont définis par l'égalité

$$\frac{e_q}{m_q} + 1 = \frac{I(\Gamma_q, f = 0)}{\mathrm{mult}(\Gamma_q)}$$

où $\{\Gamma_q\}_q$ désigne l'ensemble des branches d'une polaire de f. (Voir [Tei2] p.270.)

Dans nos deux articles cités avec F. Michel, nous avons démontré que l'ensemble $\{I(\Gamma_q, f = 0)/\mathrm{mult}(\Gamma_q)\}_q$ est égal à l'ensemble $\{q_D\}$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de la résolution minimale de f. Compte tenu de la différence d'une unité entre les $\frac{e_q}{m_q}$ et les q_D notre théorème 7.3 est bien numériquement équivalent au théorème de B. Teissier, à la p. 280 de [Tei2].

On observera que le même décalage d'une unité se retrouve dans la formule $\mathrm{Suff}(f) = [\mathrm{Loja}(f)] + 1$ citée au début de ce paragraphe. Compte tenu du cor. 2 p. 270 de [Tei2] qui affirme que $\mathrm{Loja}(f) = \max\left\{\frac{e_q}{m_q}\right\}$ (voir aussi [Tei1] p. 626) tous les énoncés sont bien numériquement équivalents.

BIBLIOGRAPHIE

[A'C] A'CAMPO, N. La fonction zêta d'une monodromie. *Comment. Math. Helv. 50* (1975), 233–248.

[B-K] BRIESKORN, E. und E. KNÖRRER. *Ebene algebraische Kurven.* Birkhäuser, 1981.

[Bo-Lo] BOCHNAK, J. and S. LOJAZIEWICZ. *A converse of the Kuiper-Kuo theorem.* Springer Lecture Notes *192* (1971), 254–261.

[Cas] CASAS-ALVERO, E. *Singularities of Plane Curves* (livre en préparation).

[Ch-Lu] CHANG, S.H. and Y.C. LU. On C^0-sufficiency of complex jets. *Can. J. Math. 25* (1973), 874–880.

[Cos] COSTA, A.F. Note on the degree of C^0-sufficiency of plane curves. *Publicationes Mathematicae 33* (1989), 37–46.

[E-N] EISENBUD, D. and W. NEUMANN. *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities.* Annals of Math. Studies 110. Princeton Univ. Press, 1985.

[Gr] GRAUERT, H. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann. 146* (1962), 331–368.

[H-N-K] HIRZEBRUCH, F., W.D. NEUMANN and S.S. KOH. *Differentiable Manifolds and Quadratic Forms.* Marcel Dekker, 1971.

[Kuo1] KUO, T.C. A complete determination of C^0-sufficiency in $J^r(2,1)$. *Invent. Math. 8* (1969), 226–235.

[Kuo2] —— On C^0-sufficiency of jets of potential functions. *Topology 8* (1969), 167–171.

[Kuo-Lu] KUO, T.C. and Y.C. LU. On analytic function germs of two complex variables. *Topology 16* (1977), 299–310.

[La] LAUFER, H.B. *Normal Two-Dimensional Singularities.* Annals of Math. Studies 71. Princeton Univ. Press, 1971.

[Lê] LÊ, D.T. Sur un critère d'équisingularité. *CRAS 272* (1971), 138–140.

[Lê-We] LÊ, D.T. et C. WEBER. Sur la topologie des applications polynomiales de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}$. Manuscrit en préparation, 1995.

[L-M-W1] LÊ, D.T., F. MICHEL et C. WEBER. Courbes polaires et topologie des courbes planes. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 24* (1991), 141–169.

[L-M-W2] LÊ, D.T., F. MICHEL et C. WEBER. Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes. *Compositio Math. 72* (1989), 87–113.

[BLi] LICHTIN, B. Estimates and formulae for the C^0-degree of sufficiency of plane curves. *Proc. Symp. in Pure Math. 40, Part 2* (1983), 155–160.

[Lo] LOJASIEWICZ, S. *Introduction to Complex Analytic Geometry.* Birkhäuser, 1995.

[Mau] MAUGENDRE, H. Topologie des germes jacobiens. Thèse Univ. Nantes, 1995.

[Mer] MERLE, M. Invariants polaires des courbes planes. *Invent. Math. 41* (1977), 103–111.

[Mil] MILNOR, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Annals of Math. Studies 61. Princeton Univ. Press, 1968.

[Mum] MUMFORD, D. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Publ. Math. IHES* (1961), 229–246.

[Neu] NEUMANN, W. D. Complex algebraic plane curves via their links at infinity. *Invent. Math 98* (1989), 445–489.

[Pala] PALAMADOV, V. P. Multiplicity of holomorphic mappings. *Funct. Anal. Appl. 1* (1967), 218–266.

[Saeki] SAEKI, O. Topological types of complex isolated hypersurface singularities. *Kodai Math. J. 12* (1989), 23–29.

[Sp] SPIVAKOVSKI, M. Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations. *Annals of Math. 131* (1990), 411–491.

[Tei1] TEISSIER, B. Introduction to equisingularity problems. *Proc. Symp. Pure Math. 29* (1975), 593–632.

[Tei2] —— Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces. *Invent. Math. 40* (1977), 267–292.

[Thom] THOM, R. Local topological properties of differentiable mappings. *Differential Analysis*, Bombay Colloquium (1964), 191–202.

[Zar] ZARISKI, O. Contributions to the problem of equisingularity. *CIME notes* (1969). Voir: *Complete Works vol. 4*, 159–237.

[Z-S] ZARISKI, P. and P. SAMUEL. *Commutative Algebra*. Springer Graduate Texts in Mathematics, vols. 28 and 29.

(Reçu le 27 février 1997)

Lê Dung Trang

C. M. I.
Université de Provence
39, rue Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13
France
e-mail: ledt@gyptis.univ-mrs.fr

Claude Weber

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
Case postale 240
CH-1211 Genève 24
Suisse
e-mail: Claude.Weber@math.unige.ch