§6. Étude d'un cas particulier

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Dans le paragraphe 7, nous déterminons le degré de C^0-suffisance d'un germe f en cherchant à quelle condition sur la multiplicité de g les composantes dicritiques de $h = \frac{f}{g}$ sont toutes bonnes.

§6. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

Considérons le germe de fonction méromorphe donné par $k(x,y) = \frac{x^v}{y^u}$ où u et v sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. La résolution minimale de $k(x,y)$ est donnée par la processus suivant. On écrit $u = ru'$ et $v = rv'$ avec $\mathrm{pgcd}(u',v') = 1$. On construit l'approximation lente de $\frac{u'}{v'}$. Pour plus de détails sur ce procédé, voir [L-M-W2] début de l'appendice. Le point de départ est fourni par le développement en fraction continue de $\frac{u'}{v'}$ donné par:

$$u'/v' = h^0 + \cfrac{1}{h^1 + \cfrac{1}{h^2 + \cdots + \cfrac{1}{h^s}}}$$

où l'on a $0 \leq h^0$, $1 \leq h^i$ pour $1 \leq i \leq s-1$, $2 \leq h^s$. Posons $m = \sum_{i=0}^{s} h^i$.

LEMME 6.1.

1. *Il y a exactement une composante dicritique et c'est la composante obtenue après m éclatements. Elle correspond précisément au nombre rationnel $\frac{u'}{v'}$ de l'approximation lente.*

2. *La transformée stricte de $y^u = 0$ est une curvette de la composante qui correspond au sommet le plus à gauche. La transformée stricte de $x^v = 0$ est une curvette du sommet le plus à droite.*

3. *Le degré de la restriction de $\hat{k}$ à la composante dicritique est égal à $r = \mathrm{pgcd}(u,v)$.*

4. *Les sommets qui sont à gauche de la composante dicritique ont valuation < 0 tandis que ceux qui sont à droite ont valuation > 0.*

Conséquence du lemme 6.1 (importante pour la suite). La composante dicritique est bonne si et seulement si $u = 1$. En effet $u = 1$ est équivalent à:

1. $r = 1$, i.e. le degré de la restriction de $\hat{k}$ au dicritique est égal à 1.

2. Les composantes du lieu exceptionnel qui rencontrent le dicritique ont valuation < 0 (en fait il n'y a qu'une composante du lieu exceptionnel qui rencontre le dicritique).

Preuve du lemme 6.1. On observe qu'il ne s'agit de rien d'autre que de construire la résolution de $x^v - y^u = 0$. Concrètement, en utilisant les calculs du début de l'appendice de [L-M-W2] on vérifie qu'en un sommet $\frac{a}{b}$ de l'approximation lente, la valuation de $\hat{k}$ sur la composante qui correspond à ce sommet vaut $av - bu$. Elle s'annule donc uniquement au sommet $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$. Les sommets qui sont à droite de $\frac{u'}{v'}$ satisfont l'inégalité $\frac{u'}{v'} < \frac{a}{b}$ tandis que ceux qui sont à gauche satisfont $\frac{a}{b} < \frac{u'}{v'}$. $\square$

Utilisation du lemme 6.1. Revenons au paragraphe 2 et à la méthode proposée pour éliminer les indéterminations de $h = \frac{h_1}{h_2}$. Dans la résolution minimale de $h_1 h_2 = 0$ les éventuels points d'indétermination se trouvent au point d'intersection du diviseur Z des zéros avec le diviseur P des pôles. Localement, la situation est exactement celle du lemme. On obtient donc une résolution de h en insérant à la place du point d'indétermination le lieu exceptionnel donné par le lemme 6.1. Le point 2 du lemme dit exactement comment se fait le recollement. L'entier $-u$ est le coefficient dans P de la composante de P qui passe par le point d'indétermination tandis que v est le coefficient de la composante de Z qui passe par le point d'indétermination. Ceci complète ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 3. Connaissant la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$ (par exemple via sa résolution minimale) on peut déterminer *effectivement* la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. En effet, la valuation de $\hat{h}$ le long de chaque composante du lieu exceptionnel se calcule par les moyens habituels. Elle peut, par exemple, se ramener à un calcul de coefficients d'enlacement. Ensuite, chaque point d'indétermination est remplacé par le segment décrit par le lemme 6.1. Finalement, on obtient une résolution de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$ en ajoutant, en plus des flèches colorées de $h_1 h_2 = 0$ des flèches d'une troisième couleur à chaque dicritique D_b en nombre égal au degré de l'application $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$.

§7. Le calcul du degré de C^0-suffisance

Soit $\pi : \Sigma \to U$ la résolution minimale de f. Soit D une composante irréductible de $\pi^{-1}(0)$ et soit γ une curvette de D. Rappelons qu'il s'agit d'un germe de courbe lisse, transverse à D en un point de D qui est lisse dans la transformée totale de $f = 0$ par π. Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel $q_D = I(f, \gamma_*)/I(l, \gamma_*)$; dans cette formule l représente une droite transverse à $f = 0$ et γ_* est l'image de γ par π (voir le paragraphe 1).