Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 55–65

ATKIN-LEHNER EIGENFORMS AND STRONGLY MODULAR LATTICES

by H.-G. QUEBBEMANN

SUMMARY. There are two arithmetical objects associated with any triple (k, ℓ, χ) consisting of an even positive integer k, a squarefree positive integer ℓ, and a character χ of the group of Atkin-Lehner involutions on $\Gamma_0(\ell)$ which maps the Fricke involution to $(-1)^{k/2}$. Namely, there is a space of common Atkin-Lehner eigenforms of weight k, and there is a genus of positive definite lattices in dimension $2k$. In general, Siegel's weighted mean of the theta series from the latter genus lies in the former space. For an individual lattice, however, the same holds under the condition of strong modularity introduced in this paper. Many interesting lattices known in higher-dimensional euclidean space are strongly modular, and their theta series are explained by the theory of modular forms.

INTRODUCTION

This paper is mainly concerned with lattices on euclidean n-space that are even and similar to their duals. Let the similarity norm be ℓ and $n = 2k$. Then the theta function of such a lattice is a modular form of weight k on $\Gamma_0(\ell)$ and an eigenform of the Fricke operator. (This was used in [Qu] for primes ℓ.) When the level ℓ is composite, however, one must also take care of invariance with respect to the other Atkin-Lehner involutions. This will be our subject here.

The algebraic structure of the relevant Atkin-Lehner eigenforms turns out to be most simple when the sum of the positive divisors of ℓ divides 24. As a consequence, the notion of extremal lattices introduced by Mallows, Odlyzko and Sloane for $\ell = 1$ ([CS], Ch.7) applies in a uniform way to $\ell = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23$. This explains, in particular, the theta series of quite a few remarkable lattices occurring in recent work by Nebe and Plesken ([N1], [NP]). In fact, their material has been a main stimulus to the present study.