Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2

Autor: Szamuely, Tamás

Kapitel: 2. Préparation

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63273

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

des théorèmes 1 et 1′ ainsi qu'une discussion superficielle de la position du th. 2 dans la théorie des corps de classes des schémas arithmétiques. Le reste de l'article est consacré à la démonstration de ce théorème.

2. Préparation

On rappelle ici quelques résultats en cohomologie galoisienne; une référence de base est le livre de Serre [15].

Si G est un groupe profini, I un sous-groupe normal fermé dans G, on a pour tout G-module discret A la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} = H^i\big(G/I, H^j(I,A)\big) \Rightarrow H^{i+j}(G,A)\,.$$

La théorie générale des suites spectrales nous fournit maintenant le

Lemme 2.1. *Si A est un module de torsion et I est de dimension cohomologique 1, il existe un homomorphisme*

$$\partial_i : H^{i+1}(G,A) \to H^i\big(G/I, H^1(I,A)\big)$$

appelé le résidu. Si, de plus, G/I est de dimension cohomologique i, cet homomorphisme est en fait un isomorphisme.

Remarque. En fait, pour A fixé, il suffit de supposer que I soit de p-dimension cohomologique 1 pour chaque p annulant un élément de A ; de même pour l'énoncé sur G/I.

Un calcul sur les cochaînes (cf. par exemple [5], p. 77 ainsi que [13], Appendice A) montre la compatibilité suivante entre résidus et cup-produits.

Lemme 2.2. *Soient G et I comme ci-dessus, A et B deux G-modules discrets de torsion. Alors pour tout $a \in H^i(G,A)$, $b \in H^j\big(G/I, H^0(I,B)\big)$,*

$$\partial_{i+j-1}\big(a \cup \operatorname{Inf}^G_{G/N}(b)\big) = \partial_{i-1}(a) \cup b\,.$$

La démonstration du théorème 1′ est une application simple du lemme 2.1.

Démonstration du théorème 1′. On sait que pour un corps muni d'une valuation discrète hensélienne, le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu est de p-dimension cohomologique 1 pour tout premier p différent

de la caractéristique résiduelle. (En fait, on trouve dans la littérature plusieurs démonstrations pour le cas complet, mais par exemple celle donnée par Serre en termes d'algèbres simples centrales dans [17] se transcrit immédiatement au cas hensélien.) Tenant compte de la remarque précédente, on peut donc appliquer le lemme 2.1 avec $i = d$, G le groupe de Galois absolu de F et I le groupe d'inertie, pour obtenir un résidu

$$\partial_d : H^{d+1}(G, \mu_m^{\otimes d}) \to H^d\big(G/I, H^1(I, \mu_m^{\otimes d})\big) \cong H^d(G/I, \mu_m^{\otimes(d-1)}). \tag{2.3}$$

En effet, on vérifie aisément que $H^1(I, \mu_m^{\otimes d}) \cong H^1(I, \mu_m) \otimes \mu_m^{\otimes(d-1)}$ en tant que G/I-modules (noter que l'action de I sur $\mu_m^{\otimes d}$ est triviale). Puis la suite de Kummer et la valuation donnent des isomorphismes $H^1(I, \mu_m) \cong F_{nr}^*/F_{nr}^{*m} \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, où F_{nr}^* est le groupe multiplicatif de l'extension maximale non ramifiée de F.

Soient maintenant $F^{(1)}$ le corps résiduel de F, $F^{(2)}$ celui de $F^{(1)}$, etc. En répétant l'argument en haut et réécrivant les groupes de cohomologie en termes de corps, on obtient (notant que $\mu_m^{\otimes 0} = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ par convention) une suite d'homomorphismes

$$H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes d}) \to H^d(F^{(1)}, \mu_m^{\otimes(d-1)}) \to \cdots \to H^1(F^{(d)}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z},$$

$F^{(d)}$ étant fini par hypothèse. Mais alors il est de dimension cohomologique 1, et l'application successive d'un théorème de transition en cohomologie galoisienne (Serre [15], chap. 4.3, prop. 12) et du deuxième énoncé du lemme 2.1 montrent qu'il y a isomorphisme partout.

Soit maintenant F un corps quelconque. Rappelons que le K-groupe de Milnor $K_d^M F$ est défini comme le quotient de la d-ième puissance tensorielle du groupe multiplicatif F^* par l'idéal engendré par les éléments de la forme $f_1 \otimes \cdots \otimes f_d$ pour lesquels il existe $1 \leqq i \neq j \leqq d$ avec $f_i + f_j = 1$. (On pose $K_0^M(F) = \mathbf{Z}$.) L'image d'un élément $f_1 \otimes \cdots \otimes f_d$ dans $K_d^M(F)$ sera notée $\langle f_1, \ldots, f_d \rangle$.

Le lien avec la cohomologie galoisienne est donné par le symbole cohomologique de Tate

$$h_{m,F}^d : K_d^M(F)/mK_d^M(F) \to H^d(F, \mu_m^{\otimes d})$$

défini pour $d = 0$ comme l'identité de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, et pour $d \geqq 1$ par cup-produit à partir du bord de la suite de Kummer. (A priori, cet homomorphisme a pour domaine $(F^*/F^{*m})^{\otimes d}$. Le fait qu'il passe au quotient par les relations est vérifié, par exemple, dans Tate [19] pour le cas typique $d = 2$.) On conjecture la bijectivité du symbole pour tout d et m. La conjecture est vérifiée dans plusieurs cas dont le plus important pour nous est le

THÉORÈME (Merkouriev-Sousline). *Le symbole $h^2_{m,F}$ est bijectif pour tout m et F.*

Notons qu'en fait nous n'utiliserons qu'un cas très particulier de ce résultat puissant, pour un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1. Ce cas peut d'ailleurs être prouvé directement en modifiant un joli argument géométrique de Bloch ([4], pp. 5.9-5.11).

Si de plus F est muni d'une valuation discrète v à corps résiduel $\kappa(v)$, il existe un homomorphisme canonique $\partial^M_{d,v} : K^M_{d+1}(F) \to K^M_d\big(\kappa(v)\big)$ (cf. Bass-Tate [3]), caractérisé par la formule

$$\partial^M_{d,v}(\langle \omega, u_1, \ldots, u_d\rangle) = \langle \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_d\rangle$$

où ω est une uniformisante, et les u_i sont des unités avec image $\overline{u}_i$ dans $\kappa(v)$. Notons que la définition implique $\partial^M_{d,v}(\langle u_1, \ldots, u_{d+1}\rangle) = 0$ si tous les u_i sont des unités et que $\partial^M_{0,v}$ n'est autre que la valuation v.

Supposons maintenant F hensélien par rapport à v et donnons-nous un entier m premier à la caractéristique de $\kappa(v)$. Alors on dispose d'une part du résidu de Milnor $\partial^M_{d,F}$, d'autre part du résidu ∂_d pour la cohomologie galoisienne à valeurs dans $\mu_m^{\otimes d}$. Tenant compte de l'identification (2.3), les deux sont liés de façon agréable par le symbole cohomologique.

LEMME 2.4. *Pour tout $d \geqq 0$, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes(d+1)}) & \xrightarrow{\partial_d} & H^d\big(\kappa(v), \mu_m^{\otimes d}\big) \\
{\scriptstyle h^{d+1}_{m,F}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h^d_{m,\kappa(v)}} \\
K^M_{d+1}(F)/mK^M_{d+1}(F) & \xrightarrow{\partial^M_{d,v}} & K^M_d\big(\kappa(v)\big)/mK^M_d\big(\kappa(v)\big)
\end{array}$$

Démonstration. L'assertion est évidente pour $d = 0$. Mais on s'y réduit immédiatement grâce au lemme 2.2, tenant compte de la compatibilité entre cup-produits et inflations, et de l'égalité $\mathrm{Inf}^F_{\kappa(v)}\, h^1_{m,\kappa(v)}(\overline{u}) = h^1_{m,F}(u)$ pour une unité u de F avec image $\overline{u}$ dans $\kappa(v)$.

REMARQUE. Par une compatibilité triviale entre les restrictions en cohomologie et les changements de base en K-théorie, on voit qu'il est superflu de supposer F hensélien : on peut toujours passer par le hensélisé par rapport à v et le lemme reste valable.

Donnons enfin, comme promis, une explication informelle pourquoi le th. 2 s'appelle une loi de réciprocité. D'abord, quelques rappels sur la théorie classique. Si F est un corps local au sens classique, $\chi \in H^1(F, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ un caractère d'ordre m de son groupe de Galois absolu, et α un élément du groupe multiplicatif F^*, on a $\delta_m \alpha \cup \chi \in H^2(F, \mu_m) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, où δ_m est le cobord de la suite de Kummer pour la multiplication par m. Ceci définit un homomorphisme

$$\phi_F : H^1(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(F^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

dont on sait (cf. [16], [17]) qu'il est le dual de l'application de réciprocité locale. Pour la théorie globale, on introduit des idèles et on définit l'application de réciprocité globale comme le produit des applications locales (on suppose ici pour simplifier qu'il n'y a pas de places réelles). Ensuite, on vérifie que le produit est en fait une somme, et que le fait que l'application passe au quotient par l'image diagonale du groupe multiplicatif de notre corps global équivaut au fait que la suite d'Albert-Brauer-Hasse-Noether pour le groupe de Brauer est un complexe (voir [18]).

Maintenant, on peut procéder de façon analogue pour le corps K du théorème 2, en remplaçant les groupes multiplicatifs par les K_2-groupes de Milnor. Pour les localisés $K_\mathfrak{p}$, on accouple $\chi \in H^1(K_\mathfrak{p}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ avec $\alpha \in K_2^M(K_\mathfrak{p})$ pour obtenir $h^2_{m,K_\mathfrak{p}}(\alpha) \cup \chi \in H^3(K_\mathfrak{p}, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ en utilisant le th. 1, ce qui définit comme en haut une application de réciprocité locale entre $K_2^M(K_\mathfrak{p})$ et le groupe de Galois absolu de $K_\mathfrak{p}$. Ensuite, on peut définir des K_2-idèles de K ainsi qu'une application de réciprocité globale comme le produit des applications locales; comme dans le cas classique, le fait que cette application passe au quotient par l'image diagonale de $K_2(K)$ se réduit via le symbole cohomologique à notre th. 2.

Remarquons enfin qu'en général, pour n'importe quel schéma normal, intègre, de dimension d et de type fini sur $\mathbf{Z}$, on peut introduire la notion de K_d-idèles et énoncer des « lois de réciprocité ». Le miracle est que par passage à un sous-schéma fermé convenable et puis par localisation en des points de codimension 1 et 2, ces énoncés se réduisent respectivement à la loi de réciprocité classique et à la Remarque suivant le th. 2. Le cas local de dimension 2 est donc le cas qui, tous dévissages faits, reste à traiter, mais la formulation du cas général appartient à la théorie des « chaînes de Parshin » pour laquelle on renvoie le lecteur à [9].

3. Toujours préparation, mais à la Weierstrass

Ce chapitre est consacré à quelques outils d'algèbre commutative qui seront utilisés dans la suite. Le résultat fondamental est la conséquence suivante du théorème de structure pour les anneaux locaux complets.

Théorème (I. S. Cohen). *Soit A un anneau local normal complet de dimension 2, à corps résiduel $\mathbf{F}$ (non nécessairement fini). Alors A est fini sur un anneau de séries formelles de la forme $O_k[[T]]$, où O_k est l'anneau des entiers d'un corps k complet pour une valuation discrète au même corps résiduel $\mathbf{F}$.*