4. RÉDUCTIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4. Réductions

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème 2. Gardons les notations du chapitre 1. Tout d'abord, *on va vérifier que* $\omega_{\mathfrak{p}} = 0$ *pour presque tous les* $\mathfrak{p}$ *de hauteur* 1.

Soit X le sous-schéma ouvert de $\operatorname{Spec} A$ obtenu en enlevant le point fermé. La suite de localisation en cohomologie étale (cf. Milne [11], Chap. III, Prop. 1.25) nous fournit par fonctorialité le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[d, "\cong"] \\ H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r, "\cong"] & H^4_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Ici la flèche verticale à droite est un isomorphisme par excision (Milne [11], Chap. III, Cor. 1.28). Quant à la flèche horizontale en bas, en continuant la suite de localisation on obtient la suite exacte

$$H^3(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(\operatorname{Spec} A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Mais les termes aux deux extrémités sont nuls car $A^h_{\mathfrak{p}}$ étant hensélien, sa cohomologie est la même que celle de son corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ (cf. Artin [2], Chap. III., Thm. 4.9), ce qui est un corps de dimension cohomologique 2, on l'a vu. Ceci démontre le second isomorphisme.

Soit maintenant S un ensemble fini de points fermés de X, et considérons la suite de localisation

$$H^3(X - S, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_S(X, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Ici, on a $H^4_S(X, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$, donc par passage à la limite sur les S (ce qui est permis dans notre cas par Milne [11], Chap. III, Lemma 1.16), on a la suite exacte

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}). \tag{4.2}$$

En particulier, l'image d'un élément $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par un homomorphisme $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$ est nulle pour presque tout $\mathfrak{p}$. Mais par (4.1), cette image n'est autre que la restriction $\omega_p \in H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})$, et on obtient le résultat.

Ensuite, on va utiliser le théorème de Cohen pour montrer le

LEMME 4.3. *Dans l'énoncé du théorème 2, on peut supposer* $A = O_k[[T]]$.

Démonstration. Soit A comme au th. 2, et notons par $\widetilde{K}$ le corps de fractions d'un anneau de la forme $O_k[[T]]$ sur lequel A est fini selon Cohen. Alors pour tout idéal premier $\widetilde{\mathfrak{p}}$ de hauteur 1 de $O_k[[T]]$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}|\widetilde{\mathfrak{p}}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \text{Cor}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \sum \text{Cor} \\ H^3(\widetilde{K}, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\widetilde{K}_{\widetilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

En effet, il existe un tel diagramme pour tous les H^i $(i \geqq 0)$, et il suffit de vérifier la fonctorialité pour $i = 0$. On peut supposer de plus que l'extension $K \mid \widetilde{K}$ est séparable et l'assertion est alors une conséquence du théorème sur les extensions de valuations (cf. Serre [16], chap. I, §2.3).

D'autre part, par le th. 1, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \text{Cor}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \text{id} \\ H^3(\widetilde{K}_{\widetilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

dont la commutativité se vérifie de la même manière que l'énoncé analogue (cf. Serre, *loc. cit.*) pour le groupe de Brauer d'un corps local (de dimension 1). Ces deux diagrammes impliquent la réduction cherchée.

On suppose donc désormais $A = O_k[[T]]$.

CONVENTION. On va noter par A° le hensélisé de l'anneau $O_k[T]_{(\pi,T)}$, *avec le même* O_k que dans la définition de A. Son corps de fractions sera noté K°. Par contre, en général, nous continuerons de noter par B^h tout anneau qui est comme dans le lemme 3.2. Veuillez accepter toutes nos excuses pour cet inconvénient.

L'idée de la démonstration du théorème 2 est de comparer la suite d'homomorphismes figurant dans l'énoncé à un complexe auxiliaire en K-théorie de Milnor par le symbole cohomologique. Or l'image de $h^d_{m,K}$ est contenue dans $H^d(K, \mu_m^{\otimes d})$, donc pour pouvoir bénéficier de cet outil il faut remplacer $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ par exemple par $H^2(K, \mu_m^{\otimes 2})$. Comme $\mathbf{F}$ est fini, la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un homomorphisme

$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{hs}, \mu_m^{\otimes 2}))$, où K^{hs} est le corps de fractions du hensélisé strict A^{hs}. Mais cet homomorphisme n'est un isomorphisme que si K^{hs} est de p-dimension cohomologique 2 pour tout p divisant m, ce qui n'est pas clair. Par contre si l'on remplace A par A°, le corps de fractions $K^{\circ\circ}$ du hensélisé strict le sera bien, étant un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1 (cf. Serre [15], chap. 4.3, prop. 11). La réduction suivante est donc :

LEMME 4.4. *On peut remplacer A par A° dans l'énoncé du th. 2.*

Démonstration. La suite de localisation (4.2) nous fournit par fonctorialité le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r, "d^\circ"] \arrow[d] & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[d] \\ H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r, "d"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r] & H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

où $X^\circ = \operatorname{Spec} A^\circ - \{(\pi, T)\}$, et $\mathfrak{p}^\circ$ parcourt les points fermés de X° qui sont en bijection avec ceux de X selon le lemme 3.2. Tenant compte de l'identification (4.1), pour achever la réduction il suffit de montrer que l'homomorphisme vertical au milieu induit un isomorphisme $\operatorname{Im} d^\circ \cong \operatorname{Im} d$. Une chasse au diagramme montre alors que pour cela il suffit de voir deux choses :

(1) Dans le diagramme (4.5), l'homomorphisme vertical à droite est injectif.

(2) Pour tous les $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^\circ$ correspondants, l'homomorphisme naturel

$$H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

Pour prouver (1), on considère les isomorphismes

$$X \cong X^\circ \times_{\operatorname{Spec} A^\circ} \operatorname{Spec} A \cong \varprojlim (X^\circ \times_{\operatorname{Spec} A^\circ} \operatorname{Spec} R),$$

où la limite projective est prise suivant les $\operatorname{Spec} R$, avec R un sous-anneau de A de type fini sur A°. Pour un tel anneau, le morphisme naturel $A^\circ \to R$ possède une section par le théorème d'approximation d'Artin [1], donc le morphisme $H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^4(X^\circ \times_{\operatorname{Spec} A^\circ} \operatorname{Spec} R, \mu_m^{\otimes 2})$ a également une section et on obtient le résultat par passage à la limite (tenant de nouveau compte de [11], Chap. III, Lemma 1.16).

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et le diagramme analogue pour A°.

$$\begin{tikzcd}
H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr] & & H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "\cong"] & \\
H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr] \arrow[ddr] & & H^4_{\mathfrak{p}}(X, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[ddr, "\cong"] & \\
& H^3(K^\circ_{\mathfrak{p}^\circ}, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "f"] & & H^4_{\mathfrak{p}^\circ}(\mathrm{Spec}(A^\circ_{\mathfrak{p}^\circ})^h, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[d, "g"] \\
& H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[rr, "\cong"'] & & H^4_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Spec}\, A^h_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})
\end{tikzcd}$$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme h du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que f l'est. Mais par le th. 1, les groupes $H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})$ et $H^3(K^\circ_{\mathfrak{p}^\circ}, \mu_m^{\otimes 2})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec f. Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par fonctorialité.

5. Conclusion

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K-théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit B^h un anneau comme dans le lemme 3.2, K^h son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de B^h est parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si $\mathfrak{q}$ parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de B^h, on définit le complexe

$$\textbf{(M)} \qquad K_2(K^h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{q}} K_1\big(\kappa(\mathfrak{q})\big) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Z}$$

comme suit : l'homomorphisme α est somme directe des résidus de Milnor $\partial^M_{1,\mathfrak{q}}$ (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de K^h induites par les