4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t)\,dt = \zeta(2)\frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\,dt = \gamma\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\,dt.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. *Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t)\,dt.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a, on peut écrire :

$$R_a(2x) - R_a(2x+1) = a(2x),$$
$$R_a(2x+1) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x+1).$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(a(2n) + a(2n+1)\big) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\,dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\,dt,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. $\square$

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln(2)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\,.$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \textit{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k\,,$$

alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t)\,dt - \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}\,.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)\,.$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n\,,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x, on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|}\,(k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a. $\square$