4.6. Utilisations de développements en série entière

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln(2)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\,.$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \textit{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k\,,$$

alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t)\,dt - \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}\,.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)\,.$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n\,,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x, on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|}\,(k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a. $\square$

EXEMPLE 12. Pour $0 < y < \pi$, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$:

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} y^{2k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \frac{1}{2} y .$$

REMARQUE 6. La série précédente converge également au sens de Cauchy, et la relation de la proposition 3.3 s'écrit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)}{n} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} + \int_y^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \frac{1}{2} y = \frac{\pi - y}{2} .$$

REMARQUE 7. La proposition précédente ne s'applique pas si l'on ne suppose pas la fonction a entière. Par exemple, si on l'appliquait à la fonction $x \mapsto \frac{x^{2q+1}y}{e^{xy}-1}$ avec q entier > 0 et $y > 0$, le développement en série entière:

$$x^{2q} \frac{xy}{e^{xy}-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} x^{2q} x^k y^k \quad (|x| < 2\pi)$$

permettrait d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1}\, dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

En fait, cette formule n'est pas valable car d'après l'exemple 8 (cf. §3.2), on a la relation:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y^{2q+1}} \int_y^{\infty} \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1}\, dt ,$$

ce qui donnerait:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1}\, dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

Or, cette relation est fausse, comme on le voit en faisant tendre y vers l'infini. Remarquons que pour $y = 2\pi$ et $q = 2p$, la relation précédente donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{2} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{4p+2} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

alors que l'on a (cf. [B2] p. 256 et p. 262) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{4} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{8p+4} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.6. *Soit $f(x) = \sum_{k\geq 1} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 1$. On suppose que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^k} = c_1\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}\left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right).$$

Démonstration. Posons $a(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a le développement convergent à l'infini :

$$a(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \frac{1}{x^n}.$$

Le mineur de a est donc la fonction entière de type exponentiel $1/\rho < 1$:

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{k\geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Par définition de la somme de Ramanujan, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\widehat{a}(\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\sum_{k\geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\,d\xi. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\rho > 1$ permet de majorer les $|c_k|$ et ainsi de permuter les signes $\int$ et $\sum$ dans la formule précédente. Il vient alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\,d\xi. \qquad \square$$

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto xe^{-zx}$:

$$xe^{-zx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \cdot$$

4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $a(z,x)$ analytique dans $D \times P$. On suppose que pour tout compact $K \subset D$, il existe des constantes C_K et $\tau_K < \pi$ telles que pour tout $x \in P$ avec $|x| > 1$ et tout $z \in K$ on ait $|a(z,x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$. Alors $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n)$ est analytique dans D. De plus, on a :*

$$\partial_z \left(\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n) \right) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z,n) \,.$$

Démonstration. On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de a tel que pour tout $z \in K \subset D$ (où K est un compact quelconque), on ait $|\mathcal{B}(a)(z,x)| \leq Ce^{k|z|}$ avec $0 < k < 1$. Soit $R_a(z,1) = \int_\gamma e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi$. Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre z, la fonction à intégrer étant majorée uniformément en $z \in K$ par une fonction intégrable. □

COROLLAIRE 4.1. *La fonction $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

$$-\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} = \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2} \cdot$$

Démonstration. Le fait que $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est analytique dans $\mathbf{C}$ est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant