Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto xe^{-zx}$:

$$xe^{-zx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \cdot$$

4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $a(z,x)$ analytique dans $D \times P$. On suppose que pour tout compact $K \subset D$, il existe des constantes C_K et $\tau_K < \pi$ telles que pour tout $x \in P$ avec $|x| > 1$ et tout $z \in K$ on ait $|a(z,x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$. Alors $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n)$ est analytique dans D. De plus, on a :*

$$\partial_z \left(\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n) \right) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z,n) \,.$$

Démonstration. On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de a tel que pour tout $z \in K \subset D$ (où K est un compact quelconque), on ait $|\mathcal{B}(a)(z,x)| \leq Ce^{k|z|}$ avec $0 < k < 1$. Soit $R_a(z,1) = \int_\gamma e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi$. Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre z, la fonction à intégrer étant majorée uniformément en $z \in K$ par une fonction intégrable. □

COROLLAIRE 4.1. *La fonction $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

$$-\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} = \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2} \cdot$$

Démonstration. Le fait que $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est analytique dans $\mathbf{C}$ est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant

vérifiée pour $\Re(z) > 1$, par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$. La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à z. $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour $z = 1$ en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}.$$

5. EXEMPLES D'UTILISATION

5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION ψ

La fonction ψ vérifie l'équation:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. §3.1), on a pour $\Re(z) > -1$:

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}.$$

Supposons $|z| < 1$ et posons $f(x) = \frac{x}{1+xz}$, on a

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction f :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k,$$

de rayon de convergence $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$, permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k\geq 1} (-1)^k z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right).$$

On en déduit le développement de ψ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k\geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k) z^{k-1}.$$