7.2. Transformation de Borel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

7. Appendice : Transformation de Laplace-Borel

Dans cet appendice, on donne une présentation de la transformation de Laplace-Borel bien adaptée au cadre de cet article. Pour un exposé plus systématique, le lecteur pourra se référer par exemple à [M].

7.1. Notations

Soit U un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture $\geq \pi$ du plan $\mathbf{C}$ de la variable complexe x. Nous désignons par $\mathcal{O}(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans l'ouvert U du plan complexe.

Nous dirons que $a \in \mathcal{O}(U)$ est de *type exponentiel* $r \geq 0$ *dans* U si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout demi-plan fermé $S \in U$ il existe une constante $C = C(S, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait la majoration :

$$|a(x)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|}.$$

L'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{O}(U)$ de type exponentiel $r \geq 0$ dans U forme un espace vectoriel que nous noterons $\mathcal{O}(U)^{\exp(r)}$. L'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{O}(U)$ de type exponentiel quelconque forme quant à lui une algèbre que l'on note $\mathcal{O}(U)^{\exp}$.

7.2. Transformation de Borel

7.2.1. *Transformée de Borel*

Soit P l'ouvert du plan complexe défini par $P := \{x \mid \Re(x) > 0\}$. Considérons l'application analytique $x \mapsto a(x)$ que l'on suppose appartenir à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$. Soit dans ces conditions d une demi-droite (orientée vers l'infini) dans l'ouvert P. On définit la *transformée de Borel* $\mathcal{B}_d$ associée à d par :

$$\mathcal{B}_d(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_d e^{x\xi}a(x)\,dx.$$

Pour fixer les idées, on notera k l'origine de la demi-droite d'intégration et l'on supposera que $k \in]0, 1]$. On identifiera la direction à l'infini de cette demi-droite $d = d(\theta)$ via son angle polaire θ, $|\theta| \leq \pi/2$. La transformée de Borel $\mathcal{B}_d(a)$ s'écrit alors

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{d(\theta)} e^{x\xi}a(x)\,dx = -\frac{1}{2i\pi}e^{k\xi}\int_0^{+\infty} e^{te^{i\theta}\xi}\,a(k+te^{i\theta})\,e^{i\theta}\,dt.$$

La condition de convergence de cette intégrale découle de notre hypothèse sur a : on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\epsilon, k) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$ et tout $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$

$$\left|a(k + te^{i\theta})\right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)\left|k+te^{i\theta}\right|},$$

de sorte que

$$\left|e^{te^{i\theta}\xi}a(k + te^{i\theta})e^{i\theta}\right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)k}\, e^{(\Re(e^{i\theta}\xi)+r+\epsilon)t}\, e^{-\epsilon t/2}.$$

On en déduit que la condition

$$\Re(e^{i\theta}\xi) \leq -(r + \epsilon)$$

fournit une majoration uniforme en ξ de l'intégrant par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous montre donc que $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert :

$$U_r(\theta) = \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

La décomposition précédente nous fournit également sans peine une estimation sur la croissance à l'infini de $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$: notons S' un demi-plan fermé contenu dans l'ouvert $U_r(\theta)$. Nous pouvons supposer que pour $\epsilon > 0$ assez petit ce demi-plan fermé S' est contenu dans le domaine des ξ tels que la condition

$$\Re(e^{i\theta}\xi) \leq -(r + \epsilon)$$

soit satisfaite. Dans ces conditions, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\left|e^{te^{i\theta}\xi}a(k + te^{i\theta})e^{i\theta}\right| \leq Ce^{(r+\epsilon/2)k}e^{-\epsilon t/2},$$

et par conséquent pour tout $\xi \in S'$,

$$|\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)| \leq \frac{Ce^{(r+\epsilon/2)k}}{\epsilon\pi}e^{k|\xi|}.$$

De là découle que $\mathcal{B}_{d(\theta)}(a)$ admet une croissance de type exponentiel k dans $U_r(\theta)$.

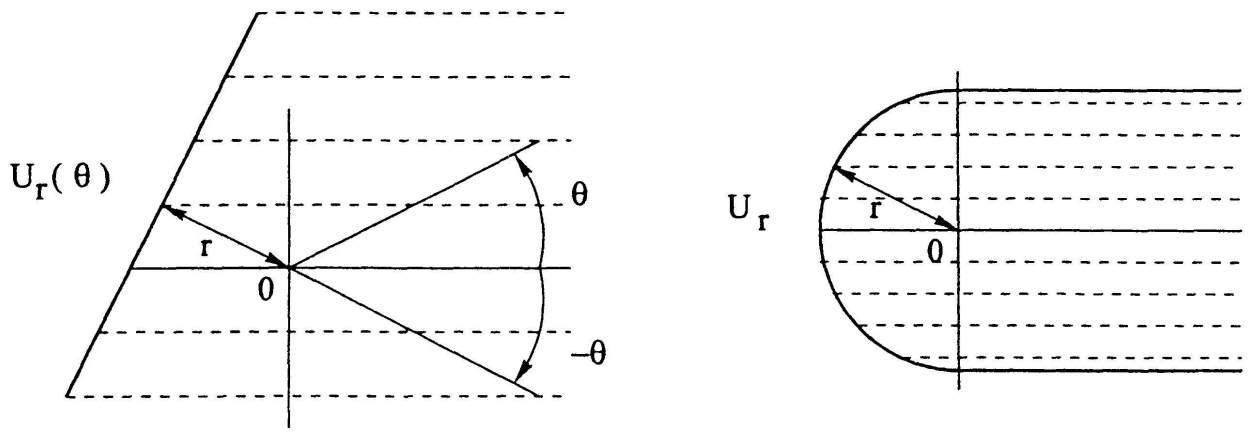

FIGURE 1

En faisant varier θ dans l'intervalle fermé $[-\pi/2, +\pi/2]$ et en application du théorème de Cauchy, la transformée de Borel se prolonge analytiquement en une fonction $\mathcal{B}_k(a)$ qui est analytique dans l'ouvert

$$U_r := \bigcup_{\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]} U_r(\theta)$$

du plan complexe $\mathbf{C}$ que l'on a représenté sur la figure 1. Remarquons d'ailleurs que *la constante C intervenant dans les majorations précédentes peut être choisie de façon indépendante du choix de l'angle polaire* $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$. On en déduit que la transformée de Borel $\mathcal{B}_k(a)$ est de type exponentiel k à l'infini, autrement dit on a le

LEMME 7.1. *Si $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ alors $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$.*

Notons à présent que le changement d'origine $k \to k'$ de d se traduit par:

$$\mathcal{B}_{k'}(a) = \mathcal{B}_k(a) + h(a)_{k,k'} ,$$

avec $h(a)_{k,k'} \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp(\tau)}$ où $\tau = \operatorname{Sup}(k, k')$. Ceci nous amène à poser la définition suivante:

DÉFINITION 2. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction analytique appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$. La transformée de Borel de a, notée $\mathcal{B}(a)$, est une fonction analytique définie dans l'ouvert U_r qui coïncide dans cet ouvert avec l'une des fonctions $\mathcal{B}_k(a)$ *modulo* l'addition d'un élément de l'algèbre $\mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$.

7.2.2. *Dépendance suivant un paramètre*

Les propriétés précédentes de la transformée de Borel se transposent au cas où a dépend d'un paramètre de la façon suivante.

DÉFINITION 3. Soit D un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On notera $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$ l'espace vectoriel des fonctions $a : (x, z) \mapsto a(x, z)$ holomorphes dans l'ouvert $P \times D$ telles que: pour tout demi-plan fermé S contenu dans l'ouvert P, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_a = C_a(S, K, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $x \in S$ on ait la majoration (uniforme en z):

$$|a(x, z)| \leq C_a e^{(r+\epsilon)|x|} .$$

LEMME 7.2. *On suppose que a appartient à l'espace $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$. Alors $\mathcal{B}_k(a)$ définit une fonction holomorphe dans l'ouvert $U_r \times D$; de plus pour tout fermé S' contenu dans l'ouvert U_r, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C = C(S', K, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $\xi \in S'$ on ait la majoration (uniforme en z):*

$$|\mathcal{B}_k(a)(\xi, z)| \leq Ce^{(k+\epsilon)|\xi|}.$$

Autrement dit, $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$.

De plus si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}} \mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}} a\right)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

7.3.1. *Transformée de Laplace*

DÉFINITION 4. Soit $k \geq 0$ et $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$, où U_r est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de f par:

$$\mathcal{L}f(x) = \int_\gamma e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

où γ est le chemin représenté sur la figure 2.

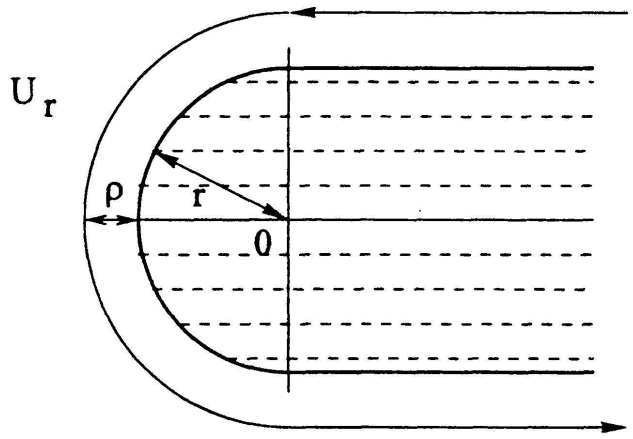

FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-