7.3. Transformation de Laplace

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LEMME 7.2. *On suppose que a appartient à l'espace $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$. Alors $\mathcal{B}_k(a)$ définit une fonction holomorphe dans l'ouvert $U_r \times D$; de plus pour tout fermé S' contenu dans l'ouvert U_r, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C = C(S', K, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $\xi \in S'$ on ait la majoration (uniforme en z):*

$$|\mathcal{B}_k(a)(\xi, z)| \leq Ce^{(k+\epsilon)|\xi|}.$$

Autrement dit, $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$.

De plus si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}} \mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}} a\right)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

7.3.1. *Transformée de Laplace*

DÉFINITION 4. Soit $k \geq 0$ et $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$, où U_r est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de f par:

$$\mathcal{L}f(x) = \int_\gamma e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

où γ est le chemin représenté sur la figure 2.

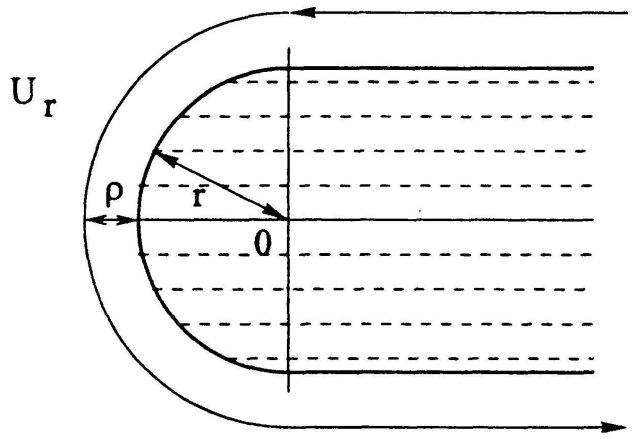

FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-

section précédente) l'analyticité de $\mathcal{L}f$ dans l'ouvert P_k du plan complexe des x, voisinage sectoriel de l'infini défini par

$$P_k := \{x \in \mathbf{C} \mid \Re(x) > k\}.$$

L'étude sur sa croissance à l'infini est l'objet du lemme suivant:

LEMME 7.3. *Si $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ alors la fonction $\mathcal{L}f$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P_k)^{\exp(r)}$.*

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{L}f$ est de type exponentiel dans l'ouvert P_k, considérons un demi-plan fermé S contenu dans cet ouvert: pour $\epsilon > 0$ assez petit nous pouvons supposer que le secteur fermé S est inclus dans le domaine des x tels que la condition

$$\Re(x) \geq (k + \epsilon)$$

soit satisfaite. En utilisant notre liberté de déformation du chemin γ à l'aide d'une homotopie laissant invariantes les directions à l'infini nous pouvons aussi supposer que γ s'écrit comme la somme:

- du chemin compact orienté $C(r+\rho)$ consistant à parcourir le demi-cercle situé dans le domaine $\Re(\xi) \leq 0$, de rayon $\alpha + \rho$, où ρ est un réel positif que l'on peut prendre *aussi petit* que l'on veut;
- de la réunion de deux demi-droites orientées $\gamma(r+\rho)$ et $\overline{\gamma(r+\rho)}$, demi-droites horizontales dont la première est d'extrémité $i(r+\rho)$ et la seconde d'origine $-i(r+\rho)$.

Considérons l'intégrale sur $\gamma(r+\rho)$,

$$\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi = e^{-ix(r+\rho)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f\big(t + i(r+\rho)\big)\, dt.$$

Suivant notre hypothèse sur f, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, on ait:

$$\big|f\big(t + i(r+\rho)\big)\big| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}\, e^{-\epsilon t/2}\, e^{(k+\epsilon)t},$$

de sorte que pour tout $x \in S$,

$$\big|e^{-xt} f\big(t + i(r+\varepsilon)\big)\big| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}\, e^{-\epsilon t/2},$$

et par conséquent pour tout $x \in S$,

$$\left|\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \frac{2Ce^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}}{\epsilon}\, e^{(r+\rho)|x|}.$$

L'intégrale sur $\overline{\gamma(r+\rho)}$ se traite de la même façon, avec une conclusion identique. En ce qui concerne l'intégrale sur le chemin compact $C(r+\rho)$, il suffit de majorer le module de f par une constante (par compacité) pour conclure. $\square$

7.3.2. *Dépendance suivant un paramètre*

La transformation de Laplace « à paramètre » ne pose pas de difficulté particulière : avec les notations de la sous-section précédente énonçons le

LEMME 7.4. *Si $f \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$ où D un ouvert de $\mathbf{C}^n$, la fonction $\mathcal{L}f$ définit une fonction holomorphe dans l'ouvert $P_k \times D$; de plus pour tout demi-plan fermé $S \subset P_k$, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C = C(S, K, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait la majoration (uniforme en z) :*

$$|\mathcal{L}f(x,z)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|},$$

autrement dit : $\mathcal{L}f \in \mathcal{O}_D(P_k)^{\exp(r)}$.

De plus si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}}\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}}f\right)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.3 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. $\square$

7.3.3. *La transformation de Laplace-Borel*

Le lemme qui suit est une simple remarque.

LEMME 7.5. *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$, on a $\mathcal{L}f = 0$.*

Mais cela nous permet de définir sans ambiguïté la transformée de Laplace $\mathcal{LB}(a)$ de la transformée de Borel d'un élément $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$: pour tout $k > 0$,

$$\mathcal{LB}(a) := \mathcal{LB}_k(a).$$

Par conséquent, $\mathcal{LB}(a)$ définit une fonction analytique dans l'ouvert P (faire tendre k vers 0). Plus précisément :

THÉORÈME 2. *Soit* $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$. *Alors*

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big) = a$$

dans l'ouvert P.

Démonstration. Soit $x \in S$ où S est le secteur fermé de l'ouvert P représenté sur la figure 3. D'après les définitions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ on a:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi}\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi$$

où $\mathcal{B}(a)(\xi)$ est défini par:

$$B(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} e^{y\xi}\,a(y)\,dy$$

si ξ est sur γ_+, et par:

$$B(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d-} e^{y\xi}\,a(y)\,dy$$

si ξ est sur γ_-, où les chemins d_+ , d_- , γ_+ et γ_- sont représentés sur la figure 3. On a donc:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = \int_{\gamma+} e^{-x\xi}\frac{-1}{2i\pi}\int_{d+} e^{y\xi}\,a(y)\,dyd\xi + \int_{\gamma-} e^{-x\xi}\frac{-1}{2i\pi}\int_{d-} e^{y\xi}\,a(y)\,dyd\xi\,.$$

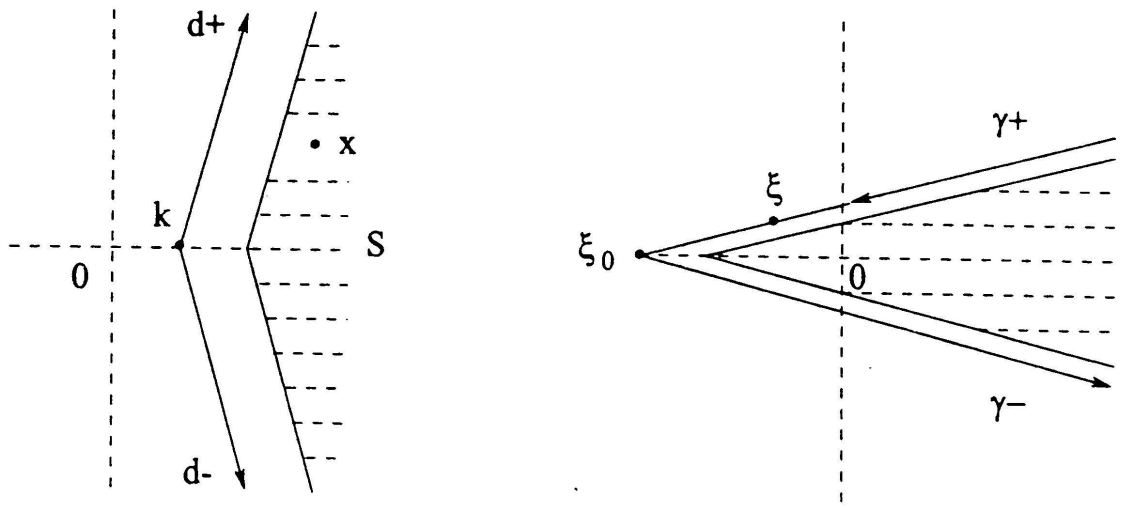

FIGURE 3

Cela donne en permutant l'ordre d'intégration:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+}\int_{\gamma+} e^{(y-x)\xi}\,d\xi a(y)\,dy - \frac{1}{2i\pi}\int_{d-}\int_{\gamma-} e^{(y-x)\xi}\,d\xi a(y)\,dy\,.$$

En intégrant $\xi \to e^{(y-x)\xi}$ le long de γ_+ et de γ_-, on obtient:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x}\, a(y)\, dy + \frac{1}{2i\pi}\int_{d-} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x}\, a(y)\, dy\,.$$

Si C_R désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy:

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x}\, a(y)\, dy\,.$$

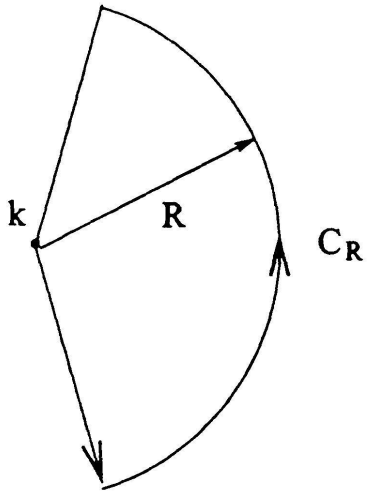

FIGURE 4

En faisant tendre R vers l'infini on voit que $\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = a(x)$ pour tout $x \in S$. $\square$

7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction a appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$ où V_β désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C}\backslash\{0\} \mid -\beta < \mathcal{A}rg(x) < \beta\}\,,$$

avec $\pi/2 < \beta < \pi$.

Reprenons les notations de la sous-section 7.2; en particulier $U_r(\theta)$ désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}\,.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant $\mathcal{B}_k(a)$ de la transformée de Borel de a se prolonge analytiquement: