Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 173–198

POLYGON SPACES AND GRASSMANNIANS

by Jean-Claude HAUSMANN and Allen KNUTSON *)

ABSTRACT. We study the moduli spaces of polygons in $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, identifying them with subquotients of 2-Grassmannians using a symplectic version of the Gel'fand-MacPherson correspondence. We show that the bending flows defined by Kapovich-Millson arise as a reduction of the Gel'fand-Cetlin system on the Grassmannian, and with these determine the pentagon and hexagon spaces up to equivariant symplectomorphism. Other than invocation of Delzant's theorem, our proofs are purely polygon-theoretic in nature.

1. INTRODUCTION

Let ${}^m\widetilde{\mathcal{P}}^k$ be the space of m-gons in $\mathbf{R}^k$ up to translation and positive homotheties (precise definitions in §2). This space comes with several structures: an action of $O(k)$, an action of S_m permuting the edges, and a function $\ell : {}^m\widetilde{\mathcal{P}}^k \longrightarrow \mathbf{R}^m$ taking a polygon ρ to the lengths of its edges (once the perimeter of ρ is fixed). The quotients of ${}^m\widetilde{\mathcal{P}}^k$ by SO_k (or O_k) are the moduli spaces ${}^m\mathcal{P}^k_+$ (respectively, ${}^m\mathcal{P}^k$). Fixing a reflection in $O(k)$ provides an involution on ${}^m\widetilde{\mathcal{P}}^k$ and ${}^m\mathcal{P}^k_+$ whose fixed point sets are ${}^m\widetilde{\mathcal{P}}^{k-1}$ and ${}^m\mathcal{P}^{k-1}$. The goal of this paper is to understand the topology of these various spaces and the geometric structures that they naturally carry when $k = 2$ or 3. They are closely related to more familiar objects (Grassmannians, projective spaces, Hopf bundles, etc.) The spaces ${}^m\mathcal{P}^k(\alpha) := \ell^{-1}(\alpha)$ of polygons with given side-lengths $\alpha \in \mathbf{R}^m$ are of particular interest.

The great miracle occurs when $k = 3$, because $\mathbf{R}^3$ is isomorphic to the space $I\mathbf{H}$ of pure imaginary quaternions, and the 2-sphere in $\mathbf{R}^3$ is Kähler. The tools of symplectic geometry can then be used. Most prominent is a

*) Both authors thank the Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique for its support.