2. La méthode de la variation des constantes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

de l'ellipse dans ce plan: i est l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à un plan de référence, h est la *longitude des nœuds*, c'est-à-dire l'angle que fait la trace du plan de l'orbite sur le plan de référence (la *ligne des nœuds*), et k est la *longitude du périhélie*, c'est-à-dire l'angle que fait l'axe de l'ellipse avec la ligne des nœuds.

2. La méthode de la variation des constantes

Maintenant que nous avons bien compris et résolu[13]) le problème à deux corps (au moins en ce qui concerne les orbites elliptiques), il nous reste à traiter le problème à deux corps perturbé, et d'introduire ainsi les premiers calculs symplectiques comme l'a fait Lagrange. Nous nous bornerons, comme lui, aux perturbations des orbites elliptiques.

Nous avons déjà expliqué, dans l'introduction, la méthode de la variation des constantes: l'influence de la perturbation à laquelle est soumise une planète attirée par un centre fixe est traduite comme une courbe sur l'espace des éléments de la planète, c'est-à-dire l'espace de ses mouvements képlériens. C'est cette courbe dont il s'agit de déterminer l'équation, et éventuellement d'en extraire quelques renseignements, comme par exemple la stabilité du grand axe. Ce résultat avait été découvert par Laplace en 1773. Nous allons montrer maintenant comment Lagrange l'a inclus dans le cadre général de sa méthode de la variation des constantes.

Supposons donc, comme le fait Lagrange, que la planète subisse de façon continue une série de chocs infiniment petits. Ces chocs se traduisent par une variation instantanée de la vitesse, sans conséquence sur sa position. Si on désigne par a un élément quelconque de la planète (pas nécessairement le demi grand axe), on pourra écrire[14]):

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \tag{14}$$

En remarquant que le vecteur $d\mathbf{v}/dt$ représente exactement la force perturbatrice X exercée sur la planète à l'instant t au point $\mathbf{r}$, la variation infinitésimale de l'élément a, sous l'effet de la perturbation, peut s'écrire à nouveau:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} X . \tag{15}$$

---

[13]) En toute rigueur il faudrait encore inverser la fonction $\theta \mapsto t$. Problème connu sous le nom de *Problème de Kepler*. Mais ce n'est pas le but de cet article.

[14]) De façon générale, on note $\partial y/\partial x$ l'application linéaire tangente d'une application $x \mapsto y$.

Le mouvement vrai est ainsi décrit par la courbe intégrale de cette équation, tracée dans l'espace des éléments de la planète. Cette famille d'ellipses est appelée *famille d'ellipses osculatrices* du mouvement perturbé.

Supposons maintenant que la force perturbatrice X dérive d'un potentiel Ω, autrement dit que :

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}}\,, \tag{16}$$

et que ce *potentiel de perturbation* Ω ne soit fonction que de $\mathbf{r}$. Ce qui, dit autrement, s'écrit :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = 0\,. \tag{17}$$

Nous ne changeons donc rien en écrivant :

$$\frac{da}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}^i} - \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}^i}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}^i}\,. \tag{18}$$

C'est maintenant, avec cette transformation astucieuse de Lagrange, que la véritable histoire commence, d'où sortira la géométrie symplectique. Mais allons un peu plus loin : puisque l'application $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$ est un difféomorphisme, le potentiel de perturbation peut être considéré aussi bien comme une fonction de $\mathbf{r}$ que comme une fonction du temps t et des éléments (a, b, c, h, i, k) de la planète. En remplaçant l'expression de

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}} + \text{etc.}, \tag{19}$$

et de

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}} + \text{etc.}, \tag{20}$$

dans l'équation (18), nous obtenons une nouvelle expression de da/dt :

$$\frac{da}{dt} = (a, b)\frac{\partial \Omega}{\partial b} + (a, c)\frac{\partial \Omega}{\partial c} + \text{etc.}, \tag{21}$$

où les parenthèses (a, b), (a, c), ..., sont les fonctions de $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ définies par :

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}^i}\frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}^i} - \frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}^i}\frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}^i}\,. \tag{22}$$

Il en est de même pour les autres parenthèses, au nombre de quatorze puisqu'on peut déjà constater que $(a, b) = -(b, a)$ etc. Les termes $\partial\Omega/\partial a$, $\partial\Omega/\partial b$, etc.

intervenant dans cette formule, peuvent être considérés comme les *forces de perturbations* rapportées aux variables (a, b, c, h, i, k). Les coefficients des forces de perturbation exprimées dans les variables (a, b, c, h, i, k), sont appelés aujourd'hui *parenthèses de Lagrange*[15]).

L'expression formelle (15) de la variation da/dt est beaucoup plus simple que celle (21) à laquelle nous avons abouti après toutes ces transformations. On est en droit de se demander quel intérêt nous avons eu à effectuer ces transformations. La réponse est contenue dans le théorème suivant de Lagrange, où l'on considère le difféomorphisme $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$.

THÉORÈME 1 [Lagrange]. *Les parenthèses* (a, b), (a, c), *etc. considérées comme des fonctions de* (t, a, b, c, h, i, k) *ne sont fonction que des éléments* (a, b, c, h, i, k).

A ce propos Lagrange écrira exactement [Lag11, volume II page 73] :

> « Ainsi la variation de a sera représentée par une formule qui ne contiendra que les différences partielles de Ω par rapport à b, c, etc., multipliées chacune par une fonction de a, b, c, etc., sans t. Et la même chose aura lieu à l'égard des variations des autres constantes arbitraires b, c, h, etc. »

NOTE 3. Lagrange donnera successivement plusieurs démonstrations de ce théorème, le généralisant et le simplifiant chaque fois davantage. Il l'énonce la première fois, dans le cadre du mouvement des planètes, dans son mémoire de 1808 [Lag08]. Il le généralise ensuite à tous les problèmes de la mécanique, dans son mémoire de 1809 [Lag09]. Il le publie enfin, sous sa forme achevée la plus générale, dans son mémoire de 1810 [Lag10]. La démonstration est épurée, simplifiée et le mémoire ne comporte plus alors que quelques pages. L'énoncé particulier que nous avons donné plus haut est extrait de sa *Mécanique Analytique* publiée en 1811 [Lag11]. Il faut remarquer qu'une variante de ce théorème est aujourd'hui connu des étudiants sous la forme suivante : *le crochet de Poisson de deux constantes du mouvement est encore une constante du mouvement...*

Aussitôt énoncé son théorème, Lagrange remarquera que la formule (21) donnant l'expression de la variation des éléments de la planète en fonction des forces de perturbations s'inverse, et notera que :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = [a, b]\,\frac{db}{dt} + [a, c]\,\frac{dc}{dt} + \text{etc.}, \tag{23}$$

[15]) et parfois même appelés *crochets de Poisson*.

où les crochets $[a,b]$, $[a,c]$, ..., ne sont eux-mêmes fonctions que des éléments (a,b,c,h,i,k), et sont explicitement donnés par:

$$[a,b] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial a}\frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial a}\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial b}, \quad \text{etc.} \tag{24}$$

Dans cette dernière équation les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ sont considérés comme fonctions de t et des éléments (a,b,c,h,i,k).

Ainsi le mouvement de la planète perturbée est décrit par une équation différentielle (21) sur l'espace des mouvements de la planète non perturbée, ou si l'on préfère sur l'*espace des constantes d'intégration* du système non perturbé. C'est évidemment là l'origine du nom donné par Lagrange à sa méthode: *la méthode de la variation des constantes*. En effet, la variation des constantes d'intégration du système non perturbé décrit le mouvement réel du système perturbé.

NOTE 4. Cette méthode est évidemment de même nature que la méthode du même nom que Lagrange avait développée entre 1774 et 1779, à la fois pour comprendre la nature des *solutions particulières des équations différentielles* [Lag74, Lag79] que pour résoudre les systèmes différentiels linéaires inhomogènes [Lag75, Remarque 5, pages 159–165]. C'est dans ce dernier mémoire [16]) *Sur les suites récurrentes*... que Lagrange expose de façon formelle sa méthode, sur la variation des constantes. Méthode qu'il n'avait fait qu'ébaucher dans [Lag74], mais qu'il avait déjà abondamment utilisée.

Dans le cas des équations linéaires inhomogènes [Lag75], la partie non homogène est traitée comme une perturbation de la partie linéaire. L'espace des solutions du système linéaire est un espace vectoriel dont chaque point est un ensemble de constantes d'intégration. Le terme non linéaire du système initial définit sur cet espace vectoriel un nouveau système différentiel, équivalent au premier, mais qui porte sur les *constantes d'intégration* du système linéaire. Il est intéressant de noter à ce propos cette remarque de Lagrange [Lag75, page 163]:

> «J'avoue que l'intégration des équations en a, b, c, ... et x sera le plus souvent très difficile, du moins aussi difficile que celle de l'équation proposée [...] mais le grand usage de la méthode précédente est pour intégrer par approximation les équations dont on connaît déjà l'intégrale complète à peu près, c'est-à-dire en négligeant les quantités qu'on regarde comme très petites.»

---

[16]) Ce mémoire n'a que peu à voir avec la méthode de la variation des constantes. Lagrange dit lui même: «*Quoique ce ne soit pas ici le lieu de nous occuper de cette matière, je vais néanmoins en traiter en peu de mots, me réservant de le faire ailleurs avec plus d'étendue.*»

Il achève la remarque 5 de son article *Sur les suites récurrentes*... par ce paragraphe prémonitoire, treize ans avant son premier mémoire sur la variation des constantes appliquées au système des planètes :

> « Il est visible au reste que cette méthode, que je ne fais qu'exposer ici en passant, peut s'appliquer également au cas où l'on aurait plusieurs équations différentielles entre plusieurs variables dont on connaitrait les intégrales complètes approchées, c'est-à-dire en y négligeant des quantités supposées très petites. Elle sera par conséquent fort utile pour calculer les mouvements des planètes en tant qu'ils sont altérés par leur action mutuelle, puisqu'en faisant abstraction de cette action la solution complète du problème est connue; et il est bon de remarquer que, comme dans ce cas les constantes a, b, c,... représentent ce qu'on nomme les *éléments des planètes*, notre méthode donnera immédiatement les variations de ces éléments provenantes de l'action que les planètes exercent les unes sur les autres. »

On peut se demander quelle est alors la différence entre cette méthode, introduite dans les années 1770, et son application au cas du système des planètes ? Elle relève principalement du type de système traité. En appliquant sa méthode générale de la variation des constantes aux systèmes différentiels spécifiques de la mécanique, Lagrange fait apparaître une structure particulière, qui n'existe pas dans le cas général et qui est à l'origine de la géométrie symplectique. Cette structure, caractérisée par les crochets et parenthèses qu'il a définis, Lagrange va savoir en tirer profit, comme il l'espérait, dans l'étude de la stabilité du grand axe des planètes, c'est ce que nous allons voir maintenant.

3. Application à la stabilité séculaire du grand axe

Nous sommes en mesure maintenant de déduire, de toutes ces transformations et manipulations algébriques, le théorème de Lagrange sur la stabilité du grand axe des planètes. Appliquons la formule (23) à l'époque c :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial c} = [c,a]\frac{da}{dt} + [c,b]\frac{db}{dt} + \cdots + [c,k]\frac{dk}{dt}\,. \tag{25}$$

On peut vérifier que les crochets $[c,b]$, $[c,h]$, $[c,i]$, $[c,k]$ sont nuls; il reste :

$$[c,a] = -1/2a^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\frac{1}{2a^2}\frac{da}{dt}\,. \tag{26}$$

Si on se rappelle alors que le demi-grand axe a est égal à $-1/f$, où la constante des forces vives f est le double de l'énergie[17]) H du mouvement képlérien, on obtient :

[17]) La lettre H a été choisie par Lagrange en l'honneur de Huygens et non de Hamilton, voir [Lag11, tome I, pages 217–226 et 267–270].