Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMÉOMORPHISMES DYNAMIQUEMENT SIMPLES DE L'ENSEMBLE DE CANTOR

Autor: Levitt, Gilbert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63905

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 279–289

HOMÉOMORPHISMES DYNAMIQUEMENT SIMPLES DE L'ENSEMBLE DE CANTOR

par Gilbert LEVITT

ABSTRACT. We classify, up to topological conjugacy, self-homeomorphisms f of a Cantor set C which are simple in the following sense: the fixed point set F of f is finite, non-empty, and the sequence f^n converges uniformly on compact subsets of $C \setminus F$. If the uniformity requirement is dropped, uncountably many different dynamics arise.

We discuss (without proofs) results by Levitt-Lustig about homeomorphisms of C induced by automorphisms of free groups.

INTRODUCTION

Les homéomorphismes d'un ensemble de Cantor C dans lui-même peuvent avoir une dynamique extrêmement riche et compliquée. Nous considérons ici les homéomorphismes $f: C \to C$ qui sont *simples*, au sens suivant: l'ensemble F des points fixes de f est fini, et la suite f^n converge uniformément sur tout compact disjoint de F. On vérifie qu'alors les deux limites $f^{-\infty}(x) = \lim_{n\to+\infty} f^{-n}(x)$ et $f^{\infty}(x) = \lim_{n\to+\infty} f^{n}(x)$ existent, et appartiennent à F.

Tout automorphisme α d'un groupe libre F_k de rang fini $k \geq 2$ induit un homéomorphisme $\partial\alpha$ sur l'ensemble de Cantor ∂F_k des bouts de F_k. On renvoie à [7], et à la deuxième partie du présent texte, pour une discussion de la dynamique de $\partial\alpha$. Pour "la plupart" des $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_k$, l'homéomorphisme $\partial\alpha$ a une dynamique Nord-Sud (il est simple, et F se compose de deux points: une source et un puits). Notre question d'origine était de savoir si toutes ces dynamiques sont conjuguées (topologiquement, ou de manière Hölder).

Notre résultat principal est une classification des homéomorphismes simples, à conjugaison topologique près. Plus généralement, on pourrait classifier de manière analogue les homéomorphismes dont une puissance est simple.

THÉORÈME 1. *Soit C un ensemble de Cantor. Il existe une bijection entre les classes de conjugaison d'homéomorphismes simples de C, et les classes d'isomorphisme de graphes finis orientés Γ tels que :*

(1) *Étant donné deux sommets distincts v_1, v_2, il y a au plus une arête orientée allant de v_1 à v_2.*

(2) *Étant donné un sommet v, il y a au plus deux arêtes dont les deux extrémités sont égales à v.*

(3) *Tout sommet de Γ appartient à au moins une arête.*

Les graphes seront toujours supposés non vides, pas forcément connexes. Deux graphes orientés sont isomorphes si et seulement si il existe entre eux un isomorphisme préservant l'orientation.

Le graphe $\Gamma = \Gamma(f)$ associé à un homéomorphisme simple f est construit comme suit. L'ensemble de ses sommets est F. Si $v_1 \neq v_2$, on place une arête orientée allant de v_1 à v_2 si et seulement si il existe $x \notin F$ avec $f^{-\infty}(x) = v_1$ et $f^{\infty}(x) = v_2$. Étant donné $v \in F$, on place une arête faisant une boucle en v si et seulement si il existe $x \notin F$ avec $f^{-\infty}(x) = f^{\infty}(x) = v$. On place une seconde boucle en v si tout voisinage de v dans C contient la totalité d'une orbite $\{f^n(x)\,;\, n \in \mathbf{Z}\}$, avec $x \notin F$ (présence d'un "pétale").

On déduit du théorème 1 :

COROLLAIRE.

(i) *Soit $N(n)$ le nombre de classes de conjugaison d'homéomorphismes simples de C possédant n points fixes. On a $\log N(n) \sim n^2 \log 2$ quand $n \to +\infty$.*

(ii) *Si f est simple, il est conjugué à f^p pour tout $p \geq 2$.*

(iii) *Tous les homéomorphismes de C ayant une dynamique Nord-Sud sont topologiquement conjugués les uns aux autres.*

Rappelons que f a une *dynamique Nord-Sud* (parfois appelée loxodromique) s'il est simple et si F se compose de deux points, une *source* v^- et un *puits* v^+ : on a $\lim_{n\to+\infty} f^{\pm n}(x) = v^{\pm}$, uniformément sur tout compact de $C \setminus \{v^{\mp}\}$.

On notera qu'il n'y a pas unicité topologique de la dynamique Nord-Sud sur la sphère S^n (l'orientation peut être préservée ou renversée). Si d'autre part $n \geq 2$ et $f\colon S^n \to S^n$ est simple avec un seul point fixe v, alors il existe toujours des orbites arbitrairement proches de v (en effet le quotient de $S^n \setminus \{v\}$ par l'action de f n'est pas compact, car $S^n \setminus \{v\}$ n'a qu'un bout).

Si l'on retire la condition d'uniformité de la définition d'un homéomorphisme simple, la dynamique peut devenir beaucoup plus complexe. Nous montrerons :

THÉORÈME 2. *Soit v un point de C. Il existe une infinité non dénombrable d'homéomorphismes $f\colon C \to C$, deux à deux non conjugués, tels que*

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \lim_{n\to+\infty} f^{-n}(x) = v$$

pour tout $x \in C$.

DÉMONSTRATIONS

Rappelons que l'ensemble de Cantor C est caractérisé à homéomorphisme près comme étant compact, métrisable, parfait, totalement discontinu (voir par exemple [5]). En particulier toute partie non vide, ouverte et fermée de C est homéomorphe à C. Tout point de C possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés. Si X est localement compact mais pas compact, on notera $\widehat{X} = X \cup \{\text{point}\}$ son compactifié d'Alexandrov.

Soit $f\colon C \to C$ un homéomorphisme simple. La fonction $f^\infty = \lim_{n\to+\infty} f^n$ existe, et est continue sur $C \setminus F$. Elle prend bien sûr ses valeurs dans F. Montrons que f^{-1} est simple. Soit K un compact de $C\setminus F$. Soit V un voisinage ouvert de F, disjoint de K. Pour n grand on a $f^n(C\setminus V) \subset V$, d'où $C \setminus V \subset f^{-n}(V)$ et $f^{-n}(C \setminus V) \subset V$. On en déduit $f^{-n}(K) \subset f^{-n}(C \setminus V) \subset V$. Donc f^{-n} converge uniformément sur K, et f^{-1} est simple.

En considérant f^∞ et $f^{-\infty}$, on associe alors à f un graphe Γ comme indiqué dans l'introduction. Il possède évidemment les propriétés (1) et (2) du théorème 1. La propriété (3) sera établie un peu plus tard.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Elle se décompose en deux parties : surjectivité et injectivité.

Surjectivité. Étant donné un graphe Γ possédant les trois propriétés mentionnées dans le théorème, nous allons construire un homéomorphisme simple f_0 tel que $\Gamma(f_0)$ soit isomorphe à Γ. Nous commençons par trois cas élémentaires.

1. Si Γ est une boucle (un seul sommet, une seule arête), considérons le décalage $\sigma\colon (k,n) \mapsto (k, n+1)$ sur $X = K \times \mathbf{Z}$, où K est un ensemble de

Cantor. La caractérisation rappelée ci-dessus assure que $\widehat{X}$ est un ensemble de Cantor. Le prolongement f_0 de σ à $\widehat{X}$ est simple, et $\Gamma(f_0) = \Gamma$.

2. Si Γ est un segment (une seule arête, à extrémités distinctes), on considère encore le décalage sur $X = K \times \mathbf{Z}$, mais on compactifie X en lui ajoutant deux points à l'infini, avec comme systèmes fondamentaux de voisinages $K \times [n, +\infty[$ et $K \times]-\infty, -n]$ respectivement.

3. Si Γ se compose d'un sommet et de deux boucles attachées à ce sommet, on considère le compactifié d'Alexandrov de $(K \setminus \{\text{point}\}) \times \mathbf{Z}$ muni du décalage.

Le cas général s'obtient en combinant ces trois modèles. On part d'un nombre fini de points, identifiés aux sommets de Γ. Pour chaque arête orientée $v_1 v_2$, avec $v_1 \neq v_2$, on attache un modèle de type 2 en identifiant la source avec v_1 et le puits avec v_2. A chaque sommet v on attache un modèle de type 1 (resp. 3) s'il y a dans Γ une (resp. deux) boucles en v, en identifiant l'unique point fixe avec v. La propriété (3) du théorème 1 garantit que l'on obtient un espace de Cantor. Celui-ci est muni d'un homéomorphisme simple f_0 vérifiant $\Gamma(f_0) = \Gamma$.

Injectivité. Soit f un homéomorphisme simple. Pour $v \in F$, soit

$$A(v) = \{x \notin F \mid f^{-\infty}(x) = f^{\infty}(x) = v\}.$$

Pour $v_1 \neq v_2$, soit

$$A(v_1, v_2) = \{x \notin F \mid f^{-\infty}(x) = v_1,\ f^{\infty}(x) = v_2\}.$$

Les $A(v)$ et $A(v_1, v_2)$ qui ne sont pas vides forment une partition de $C \setminus F$ en sous-espaces f-invariants ouverts et fermés, dont nous déterminons maintenant l'adhérence dans C.

LEMME. *Si $A(v) \neq \varnothing$, on a $\overline{A(v)} = A(v) \cup \{v\}$. De même, si $A(v_1, v_2) \neq \varnothing$, on a $\overline{A(v_1, v_2)} = A(v_1, v_2) \cup \{v_1, v_2\}$.*

Démonstration. Soit V un voisinage ouvert et fermé de v tel que $V \cap F = \{v\}$, et $W = \{x \in V \mid x \notin f(V)\}$. Toute orbite de $A(v)$ non entièrement contenue dans V rencontre W. La convergence de $f^{\pm n}$ vers $f^{\pm\infty}$ étant uniforme sur le compact W, il existe un entier N tel que

$$A(v) \subset V \cup \bigcup_{|n| \leq N} f^n(W).$$

On en déduit $\overline{A(v)} = A(v) \cup \{v\}$. La démonstration pour $A(v_1, v_2)$ est analogue, en considérant un voisinage de $\{v_1, v_2\}$ ne contenant pas d'autre point de F. $\square$

Il résulte de ce lemme que $\Gamma(f)$ possède la propriété (3) du théorème 1. En effet, un $w \in F$ n'appartenant à aucune arête n'appartiendrait à aucun $\overline{A(v)}$ ou $\overline{A(v_1, v_2)}$. C'est impossible puisque l'union des adhérences des $A(v)$ et des $A(v_1, v_2)$ est C tout entier.

Nous allons maintenant terminer la preuve du théorème 1 en montrant que, étant donné Γ, tout homéomorphisme simple f tel que $\Gamma(f)$ soit isomorphe à Γ est topologiquement conjugué au f_0 construit plus haut.

Le lemme permet de supposer que f_0 est l'un des trois modèles ci-dessus, la conjugaison cherchée pouvant être définie séparément sur chaque $\overline{A(v)}$ ou $\overline{A(v_1, v_2)}$.

Commençons par le cas où Γ est un segment. Appelons v_1 la source de f, et v_2 le puits. Soit V un voisinage ouvert et fermé de v_2 ne contenant pas v_1. Nous affirmons que l'ouvert $U = \bigcup_{n \geq 0} f^n(V)$ est aussi fermé. En effet, si $W = \{x \in f(V) \mid x \notin V\}$, on a

$$U = V \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W),$$

et cette union est finie car f^n converge vers v_2 uniformément sur W.

Soit alors $\mathcal{K}$ le compact $U \setminus f(U)$. Il rencontre chaque orbite de $C \setminus F$ exactement une fois. Soit ρ un homéomorphisme de $\mathcal{K}$ sur le compact K utilisé pour construire f_0. On le prolonge en un homéomorphisme de $C \setminus F$ sur $K \times \mathbf{Z}$ en posant $\rho(f^n(k)) = (k, n)$ pour $k \in \mathcal{K}$, et il s'étend à C en une conjugaison de f à f_0.

Supposons maintenant que Γ a un seul sommet. Soit v l'unique point fixe de f. Notons que, pour tout voisinage ouvert V de v, les intersections avec $C \setminus V$ de $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V)$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V)$ sont des ouverts. En effet, si $Y \subset C \setminus V$ est un voisinage compact d'un point $x \neq v$, on a pour n assez grand $f^{-n}(Y) \subset V$ et $f^n(Y) \subset V$, et donc aussi $Y \subset f^n(V)$ et $Y \subset f^{-n}(V)$.

On suppose d'abord que Γ est une seule boucle, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de v ne contenant aucune orbite autre que $\{v\}$ en totalité. On choisit V ouvert et fermé, et on considère

$$\mathcal{K} = (C \setminus V) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V).$$

Il est fermé, ouvert, et rencontre toute orbite autre que $\{v\}$ exactement une fois. Comme précédemment, tout homéomorphisme de $\mathcal{K}$ avec K s'étend en une conjugaison de f avec le f_0 du modèle 1.

Supposons enfin que f a un unique point fixe v et qu'il existe des orbites arbitrairement proches de v. Soit $V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_p \supset \ldots$ un système

fondamental de voisinages ouverts et fermés de v, avec $V_0 = C$. Posons

$$\mathcal{Q}_p = (V_p \setminus V_{p+1}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V_{p+1}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_p)$$

pour $p \geq 0$, et $\mathcal{Q} = \cup\, \mathcal{Q}_p$. Chaque $\mathcal{Q}_p$ étant ouvert, fermé, et contenu dans V_p, l'ensemble $\mathcal{Q}$ est ouvert, et son adhérence est $\mathcal{Q} \cup \{v\}$. En particulier, $\mathcal{Q}$ est homéomorphe à un ensemble de Cantor privé d'un point. De plus $\mathcal{Q}$ rencontre chaque orbite autre que $\{v\}$ en exactement un point (si $x \neq v$, son orbite rencontre $\mathcal{Q}_p$, où p est le plus grand entier tel que l'orbite soit contenue dans V_p). Tout homéomorphisme de $\mathcal{Q}$ sur $K \setminus \{\text{point}\}$ s'étend alors en une conjugaison de f avec le f_0 du modèle 3. $\square$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE

Seule la première assertion demande une démonstration. Soit A un ensemble à n éléments. Il y a $p_n = 3^n 2^{n(n-1)}$ manières d'attacher des arêtes orientées aux éléments de A de façon que le graphe obtenu vérifie les conditions (1) et (2) du théorème 1. Presque tous ces graphes vérifient également la condition (3): le nombre de ceux qui ne la vérifient pas est majoré par np_{n-1}, qui est un $o(p_n)$. Pour estimer $N(n)$ nous devons compter les graphes à isomorphisme près, c'est à dire en faisant agir le groupe symétrique. Puisque $\log p_n \sim n^2 \log 2$ et $\log n! = o(n^2)$, on a bien $\log N(n) \sim n^2 \log 2$. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit K un ensemble de Cantor, et $L = \widehat{K \times \mathbf{N}}$. Nous distinguons dans L le point à l'infini, noté ∞, et $L_0 = K \times \{0\}$. Soit σ le prolongement à L du décalage $(k, n) \mapsto (k, n+1)$, et σ^{-1} son inverse, défini sur $L \setminus L_0$.

Considérons maintenant $M = L \times \{-1, 1\} \times \mathbf{N}$. Notons $\widehat{M} = M \cup \{v\}$ son compactifié d'Alexandrov, $M^- = L \times \{-1\} \times \{0\}$, et $M^+ = L \times \{1\} \times \{0\}$. Nous définissons un homéomorphisme φ de $\widehat{M} \setminus M^+$ sur $\widehat{M} \setminus M^-$ par:

$$\begin{cases} \varphi(\ell, -1, n) = (\sigma^{-1}(\ell), -1, n+1) & \text{pour } \ell \in L \setminus L_0 \\ \varphi(\ell, -1, n) = (\ell, 1, n) & \text{pour } \ell \in L_0 \\ \varphi(\ell, 1, n) = (\sigma(\ell), 1, n-1) & \text{pour } n > 0 \\ \varphi(v) = v\,. \end{cases}$$

La dynamique de φ est analogue à celle d'un champ de vecteurs du plan dans un secteur d'une selle. Le point v est fixe. L'orbite positive de $(\infty, -1, 0)$ tend vers v, de même que l'orbite négative de $(\infty, 1, 0)$. Si $\ell \neq \infty$, l'orbite

d'un point $(\ell, -1, 0) \in M^-$ aboutit à M^+, après un nombre d'itérations qui tend vers l'infini quand $\ell \to \infty$ dans L.

Soit maintenant $q \geq 1$ un entier. Soit P l'union disjointe de q exemplaires $\widehat{M}_1, \ldots, \widehat{M}_q$ de $\widehat{M}$, et de deux exemplaires L^-, L^+ de $\widehat{L \times \mathbf{N}}$. Notons que les sous-espaces M_i^-, M_i^+ de $\widehat{M}_i$, ainsi que $L \times \{0\} \subset L^-$ et $L \times \{0\} \subset L^+$, sont des exemplaires de L. Il existe donc des homéomorphismes canoniques entre ces espaces.

Nous définissons un homéomorphisme θ sur P de la manière suivante. Sur chaque exemplaire $\widehat{M}_i$, il est égal à φ en dehors de M_i^+. Sur M_i^+, pour $i < q$, il coïncide avec l'homéomorphisme naturel de M_i^+ sur M_{i+1}^-, et sur M_q^+ c'est l'homéomorphisme de M_q^+ avec $L \times \{0\} \subset L^+$. On définit θ sur L^+ comme le prolongement du décalage $(\ell, n) \mapsto (\ell, n+1)$ de $L \times \mathbf{N}$, sur $L^- \setminus (L \times \{0\})$ comme le prolongement de l'inverse du décalage, et enfin sur $L \times \{0\} \subset L^-$ comme l'homéomorphisme naturel de $L \times \{0\}$ avec M_1^-.

Les points fixes de θ sont une source v^- (le point à l'infini de L^-), un puits v^+ (le point à l'infini de L^+), et q "selles" $v_1, \ldots, v_q$ (une dans chaque $\widehat{M}_i$). Toutes les orbites infinies de θ vont de v^- à v^+, sauf $q+1$ orbites "singulières" qui vont respectivement de v^- à v_1, de v_i à v_{i+1} $(1 \leq i \leq q-1)$, et de v_q à v^+.

Ces $q+1$ orbites sont mutuellement contiguës, au sens suivant : nous disons que les orbites de deux points x, y sont *contiguës* s'il existe une suite $x_p \to x$, et des entiers n_p, avec $\theta^{n_p}(x_p) \to y$. Les autres orbites infinies de θ ne sont contiguës qu'à elles-mêmes. Les orbites singulières de θ sont en fait les points de non-séparation de l'espace des orbites infinies de θ.

Identifiant entre eux les $q+2$ points fixes de θ, nous obtenons pour chaque $q \geq 1$ un homéomorphisme f_q d'un ensemble de Cantor, possédant un unique point fixe v et vérifiant les conditions du théorème 2. Ces homéomorphismes ne sont pas conjugués entre eux : ils sont distingués par la contiguïté.

Pour obtenir une infinité non dénombrable, nous combinons les f_q. Soit Q une partie non vide de $\mathbf{N}$, avec $0 \notin Q$. Pour chaque $q \in Q$, soit C_q un ensemble de Cantor muni de l'homéomorphisme f_q. Notons c_q le point fixe de f_q. Considérons, sur le compactifié d'Alexandrov de l'union disjointe des $C_q \setminus \{c_q\}$, l'homéomorphisme f_Q qui coïncide avec f_q sur chaque $C_q \setminus \{c_q\}$. Il vérifie les conditions du théorème 2. Sur l'ensemble des orbites infinies de f_Q, la contiguïté est une relation d'équivalence. Il y a une classe d'équivalence à $q+1$ éléments pour chaque $q \in Q$, et les autres classes ont un seul élément. Donc f_Q n'est pas conjugué à $f_{Q'}$ si $Q \neq Q'$. $\square$

AUTOMORPHISMES DES GROUPES LIBRES

Nous exposons ici sans démonstration quelques résultats de [7] sur la dynamique des homéomorphismes de C provenant des automorphismes de groupes libres. Certains énoncés s'étendent aux homéomorphismes obtenus sur le bord d'un groupe hyperbolique arbitraire.

Soit donc F_k un groupe libre de rang $k \geq 2$. On lui associe un ensemble de Cantor $C = \partial F_k$, que l'on peut voir comme son espace de bouts, ou son bord en tant que groupe hyperbolique [1, 3, 4, 10]. Plus concrètement, si l'on choisit une base $\{g_1, \ldots, g_k\}$, on considère les mots réduits infinis $g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots$, où chaque ε_i vaut ± 1. Une suite X_n, avec $X_n \in F_k \cup \partial F_k$, converge vers $X \in \partial F_k$ si, pour tout p, la p-ième lettre de X_n coïncide avec celle de X pour n assez grand.

Tout automorphisme α de F_k définit un homéomorphisme $f = \partial\alpha$ de C. Si par exemple α est la conjugaison i_g par $g \in F_k$, alors f est simplement l'action naturelle de g sur C par translation à gauche (la translation à droite par g^{-1} est à distance bornée de l'identité dans F_k, donc induit l'identité sur le bord). On montre facilement dans ce cas que f a une dynamique Nord-Sud, avec puits $g^\infty = \lim_{n\to\infty} g^n$ et source $g^{-\infty} = \lim_{n\to\infty} g^{-n}$, pourvu que g ne soit pas trivial. Nous allons voir une généralisation de ce phénomène.

Le groupe des *automorphismes extérieurs* $\operatorname{Out} F_k$ est le quotient du groupe d'automorphismes $\operatorname{Aut} F_k$ par la relation d'équivalence qui identifie α et $i_g \circ \alpha$. Nous voyons $\Phi \in \operatorname{Out} F_k$ comme un ensemble d'automorphismes et, comme Nielsen [9], nous disons que $\alpha, \beta \in \Phi$ sont *isogrédients* s'il existe $g \in F_k$ tel que $\beta = i_g \circ \alpha . \circ (i_g)^{-1}$. Soit $\mathcal{S}(\Phi)$ l'ensemble des classes d'isogrédience de représentants de Φ. Si par exemple Φ est l'identité, ses représentants sont les conjugaisons i_g et $\mathcal{S}(\Phi)$ s'identifie naturellement aux classes de conjugaison de F_k.

Deux automorphismes isogrédients α, β produisent des homéomorphismes $\partial\alpha, \partial\beta$ topologiquement conjugués. Nous pouvons donc parler de la dynamique d'une classe d'isogrédience $s \in \mathcal{S}(\Phi)$.

THÉORÈME. *Soit $\Phi \in \operatorname{Out} F_k$, avec $k \geq 2$. L'ensemble $\mathcal{S}(\Phi)$ des classes d'isogrédience de représentants de Φ est infini. Tout $s \in \mathcal{S}(\Phi)$, sauf au plus un nombre fini, a une dynamique Nord-Sud sur C.*

Intéressons-nous maintenant à la dynamique d'un $\partial\alpha$ quelconque.

THÉORÈME. *Pour tout* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$, *l'homéomorphisme* $\partial\alpha$ *a au moins deux points périodiques de période* $\leq 2k$. *Les périodes des points périodiques de* $\partial\alpha$ *sont bornées par un nombre* M_k *ne dépendant que de* k, *avec* $\log M_k \sim \sqrt{k \log k}$ *quand* $k \to \infty$.

Si α est défini par $\alpha(g_i) = g_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $\alpha(g_k) = g_1^{-1}$, tout point de C est périodique de période $2k$. Si α est défini par $\alpha(g_i) = g_{\sigma(i)}$, où $\sigma \in \Sigma_k$ est une permutation de $\{1, \ldots, k\}$, la période d'un point générique de C est l'ordre de σ. La quantité $\sqrt{k \log k}$ est un équivalent du logarithme de l'ordre maximal d'un élément de torsion dans Σ_k, ou $GL(k, \mathbf{Z})$, ou $\operatorname{Aut} F_k$ (voir [6], [8]).

Cherchons à quelle condition $\partial\alpha$ est simple. Une condition nécessaire est que pour tout $n \geq 1$ le sous-groupe fixe $\operatorname{Fix} \alpha^n = \{g \in F_k \mid \alpha^n(g) = g\}$ soit trivial ou cyclique, car sinon son bord forme un ensemble de Cantor de points périodiques.

Nous laissons de côté le cas où α laisse invariant un sous-groupe cyclique, mentionnant seulement l'automorphisme $a \mapsto a$, $b \mapsto aba$ de F_2 ; pour cet exemple $\partial\alpha$ est simple, le graphe associé par le théorème 1 étant un cercle avec deux sommets et deux arêtes.

Supposons donc $\operatorname{Fix} \alpha^n$ trivial pour tout n. On sait qu'alors les points périodiques de $\partial\alpha$ sont des sources ou des puits, et qu'il y a au plus $2k$ points de chaque type [2].

CONJECTURE. *Soit* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$. *Si le sous-groupe fixe de* α^n *est trivial pour tout* $n \geq 1$, *alors une puissance de* $\partial\alpha$ *est simple.*

Le graphe associé à une puissance simple de $\partial\alpha$ est un graphe bipartite, toute arête allant d'une source à un puits. Nous ne savons pas si tous les graphes bipartites finis peuvent être obtenus de cette façon.

La conclusion de la conjecture revient à dire que tout compact $\partial\alpha$-invariant non vide $K \subset C$ contient un point périodique. Énoncée sous cette forme, la conjecture a un sens pour un automorphisme α quelconque.

La conjecture ci-dessus est vraie si α est irréductible à puissances irréductibles (aucune puissance de α n'envoie un facteur libre de F_k sur un conjugué de lui-même). D'autre part, tout compact $\partial\alpha$-invariant $K \subset C$ contenant un point de la forme g^∞ contient un point périodique. Cela se déduit du résultat suivant :

THÉORÈME. *Soit* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$, *et* $g \in F_k$ *non périodique. Il existe un entier* $q \leq M_k$ *tel que la suite* $(\alpha^q)^n(g)$ *converge vers un point fixe de* $\partial\alpha^q$.

Considérons maintenant la vitesse de convergence vers les points fixes (ou périodiques) de $\partial\alpha$. On définit une distance sur ∂F_k par $d(X,Y) = e^{-c}$, où X, Y sont deux mots réduits infinis et c est la longueur de leur plus grand segment initial commun (voir [3]). Lorsque l'on considère deux bases différentes de F_k, les distances d_1, d_2 ainsi associées sont Hölder-équivalentes : il existe $A > 0$ et $\beta \in]0,1]$ tels que $A^{-1}d_1^{1/\beta} \leq d_2 \leq Ad_1^{\beta}$.

On a ainsi défini une structure Hölder canonique sur ∂F_k (voir [3, 1]). Les homéomorphismes $\partial\alpha$ sont Hölder; lorsqu'ils sont topologiquement conjugués (par exemple si ce sont des homéomorphismes Nord-Sud), on peut se demander s'ils sont Hölder-conjugués.

Remarquons d'abord que, *si* g *et* h *sont des éléments non triviaux de* F_k, *alors les actions de* g *et* h *sur* ∂F_k *sont des homéomorphismes Hölder-conjugués* (on notera que, pour un groupe hyperbolique arbitraire, les actions de deux éléments d'ordre infini ne sont même pas forcément topologiquement conjuguées).

Montrons rapidement ce fait. Le résultat est vrai si $h = \alpha(g)$ avec $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$, car $\partial\alpha$ est une conjugaison Hölder. Il l'est aussi si g et h sont des mots cycliquement réduits de même longueur : en effet les translations à gauche par g et h sont conjuguées en tant qu'isométries de l'arbre de Cayley de F_k, et une isométrie de cet arbre induit un homéomorphisme Hölder sur ∂F_k. Notant g_1, g_2 deux éléments d'une base de F_k, on peut ainsi conjuguer de façon Hölder l'action d'un g quelconque à celle d'un élément cycliquement réduit, puis à celle d'un élément de la forme $g_1 g_2^p$, puis à celle de g_1.

Le théorème suivant fournira une obstruction à la conjugaison Hölder.

THÉORÈME. *Soit* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$ *tel que* $\partial\alpha$ *possède un point fixe attractif* X. *Il existe un nombre algébrique* $\lambda \geq 1$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\Big(-\log d(\partial\alpha^n(Y), X)\Big) = \log\lambda$$

pour Y *proche de* X *dans* ∂F_k *(et pour toute distance* d *sur* ∂F_k *définissant la structure Hölder).*

Pour $\lambda > 1$, la conclusion signifie que les orbites s'approchent de X à peu près à la même vitesse que pour l'application $x \mapsto x^\lambda : [0,1[\to [0,1[$. Lorsque α est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov φ d'une surface compacte à bord, le λ obtenu est le coefficient de dilatation de φ.

Le nombre λ associé au point fixe X est un invariant de conjugaison Hölder, tout comme en dynamique différentiable les valeurs propres de la matrice jacobienne sont un invariant de conjugaison C^1.

RÉFÉRENCES

[1] COORNAERT, M., T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes*. Lecture Notes 1441. Springer-Verlag, 1990.

[2] GABORIAU, D., A. JAEGER, G. LEVITT et M. LUSTIG. An index for counting fixed points of automorphisms of free groups. *Duke Math. J. 93* (1998), 425–452.

[3] GHYS, E. et P. DE LA HARPE (eds.). *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. Progress in Mathematics 83*. Birkhäuser, 1990.

[4] GROMOV, M. Hyperbolic groups. In: *Essays in Group Theory*, S. M. Gersten Ed. *M.S.R.I. Publ. 8*. Springer Verlag (1987), 75–263.

[5] HOCKING, J. G. et G. S. YOUNG. *Topology*. Dover Publications, New York, 1961.

[6] LANDAU, E. Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades. *Archiv der Math. und Phys., Ser. 3, 5* (1903), 92–103.

[7] LEVITT, G. et M. LUSTIG. *Prépublication*.

[8] LEVITT, G. et J.-L. NICOLAS. On the maximum order of torsion elements in $GL(n, \mathbf{Z})$ and $\mathrm{Aut}(F_n)$. *J. Algebra 208* (1998), 630–642.

[9] NIELSEN, J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math. 50* (1927), 189–358; traduction anglaise dans *Collected Mathematical Papers*, Birkhäuser, 1986.

[10] SHORT, H. et al. Notes on word hyperbolic groups. In: *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*. E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky, eds. World Scientific (1991), 3–63.

(Reçu le 3 février 1998)

Gilbert Levitt

Laboratoire Émile Picard
UMR CNRS 5580
Université Paul Sabatier
F-31062 Toulouse Cedex 4
France
e-mail: levitt@picard.ups-tlse.fr

vide-leer-empty