Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE
Autor: Colin de Verdière, Yves
Kapitel: 4.2 La phase stationnaire
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$2(n-1)$ des trajectoires de H_0 contenues dans la couche d'énergie E_0 et la munir de l'hamiltonien moyenné $K = \frac{1}{T_0}\int_\gamma H_1 dt$ décrivant une dynamique sur les trajectoires de H_0. Cette dynamique décrit bien le comportement des trajectoires de H_ε dans un intervalle de temps de l'ordre de 1.

4.2 La phase stationnaire

Voir [36].

Dans le cas qui nous préoccupe dans la suite (linéaire), ce découplage est une conséquence de la phase stationnaire : si on considère une intégrale oscillante du type :

$$I(h) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iS(x)/h} a(x)|dx|\,,$$

où $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est C^∞ et $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, le comportement asymptotique de $I(h)$ quand h tend vers 0 est contrôlé par les points critiques de S situés dans le support de a. Lorsque ceux-ci sont non dégénérés, on a une formule explicite pour le développement asymptotique. Les faits remarquables sont les suivants : le comportement est en $h^{n/2}$, il y a une phase liée à l'indice de la hessienne de S aux points critiques.

Plus précisément, si S n'a qu'un point critique supposé non dégénéré x_0 dans le support de a de signature σ, on a :

$$I(h) \sim (2\pi h)^{n/2} e^{iS(x_0)/h} e^{i\sigma\pi/4} \frac{a(x_0)}{|\det(S''(x_0))|^{1/2}}\,.$$

Le coefficient principal (amplitude) admet une interprétation géométrique comme densité relative de 2 mesures en x_0 : la mesure $a(x)dx$ et la mesure associée canoniquement à S'' (comme en riemannien). Cette remarque est à l'origine de la géométrisation du calcul des intégrales oscillantes.

Donnons 3 applications semi-classiques simples de la phase stationnaire :

Exemple 4.1 (Fourier et Legendre).

Soit $S\colon U \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ et supposons que $x \to S'(x)$ est un difféomorphisme C^∞ de U sur un ouvert V du dual de $\mathbf{R}^n$. Soit alors $\widehat{S}(\xi)\colon V \to \mathbf{R}$ la transformée de Legendre de S caractérisée par

$$\{(x, S'(x)) \mid x \in U\} = \{(\widehat{S}'(\xi), \xi) \mid \xi \in V\}\,,$$

normalisée par $\widehat{S}(\xi_0) + S(x_0) = x_0\xi_0$ pour un point $\xi_0 = S'(x_0)$.

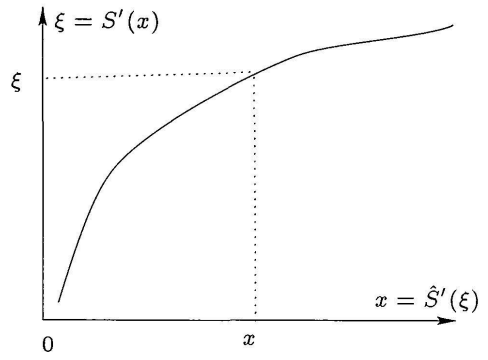

FIGURE 4
Transformation de Legendre

Soit $a \in C_0^\infty(U)$ *et*

$$\mathcal{F}_h\phi(\xi) = \int e^{-ix\xi/h}\phi(x)|d_hx|\,,$$

où $|d_hx|$ *est une mesure de Haar sur* $\mathbf{R}^n$ *normalisée pour que* $\mathcal{F}_h$ *soit unitaire de* $L^2(\mathbf{R}^n, |d_hx|)$ *sur* $L^2(\mathbf{R}^n, |d_h\xi|)$.

Alors

$$\mathcal{F}_h(a(x)\,e^{iS(x)/h})\,(\xi) \sim A(\xi)\,e^{-i\widehat{S}(\xi)/h}\,,$$

où $\widehat{S}$ *est la transformée de Legendre de* S.

On peut donc dire que la transformée de Legendre est la *limite semi-classique* de la transformée de Fourier.

EXEMPLE 4.2 (VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE).

Soit $a(k)\,e^{i(kx-\omega(k)t)}$ *une onde plane monochromatique de fréquence* $\omega(k)$ *dans* $\mathbf{R}^n$. *Sa vitesse de propagation est* $v = \frac{k\,\omega(k)}{\|k\|^2}$. *C'est la vitesse de déplacement des hyperplans d'égale phase*

$$kx - \omega(k)t = \alpha_0\,,$$

souvent appellée vitesse de phase.

Si on prend une superposition de telles ondes de la forme

$$F(x,t) = \int a(k)\,e^{ikx-\omega(k)t}|dk|\,,$$

avec k *grand, la fonction* F *est négligeable en dehors des point* (x,t) *tels que* $x = \omega'(k)t$ *qui se propagent à la vitesse* $\omega'(k)$ *appellée* vitesse de groupe *du paquet d'onde.*

EXEMPLE 4.3 (PRINCIPE DE HUYGENS).
Considérons une onde sphérique de la forme

$$a(x)\, e^{ikr}$$

issue de l'origine. Soit maintenant Σ *une surface et considérons une superposition d'ondes sphériques émises par les points de* Σ *de la forme*

$$F(M) = \int_{\Sigma} e^{ikd(P,M)} a(P)\, |dP| \,.$$

Le comportement asymptotique lorsque k *est grand est négligeable sauf si* M *est sur une normale à* Σ. *La phase est alors donnée à une constante près par*

$$kd(A, M) - n(M)\frac{\pi}{2}\,,$$

à condition que M *ne soit pas un point focal, et où* $n(M)$ *est l'indice de Morse de la fonction distance.*

On voit donc qu'aux grandes fréquences le front d'onde (phases constantes) est l'enveloppe des fronts sphériques issus de Σ, *ce qui est le principe de Huygens en optique géométrique.*

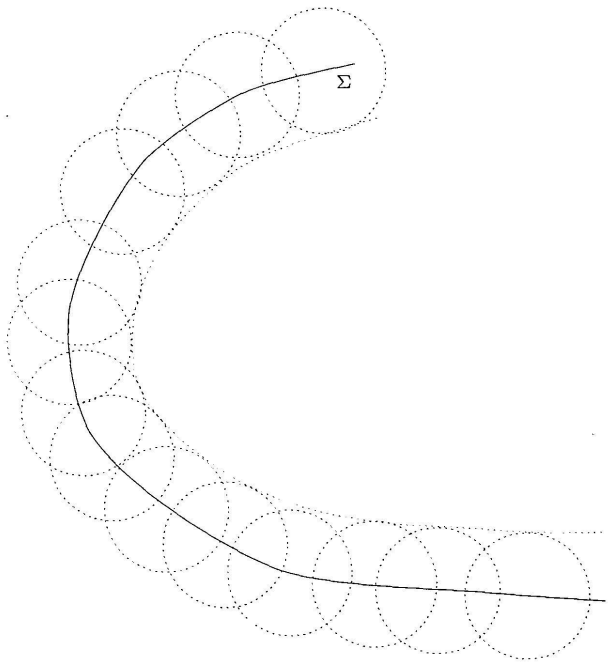

FIGURE 5
Principe de Huygens