4.3 EDP LINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4.3 EDP LINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE

En général, on étudiera une équation du type :

$$P(h, x, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x, h)\,(\frac{h}{i}\partial_x)^\alpha\,,$$

où les $a_\alpha(x, h)$ sont de la forme :

$$a_\alpha(x, h) = \sum_{j \geq 0} b_{\alpha,j}(x) h^j\,.$$

On définit alors

$$P_0(x, \xi) = \sum b_{\alpha,0}\xi^\alpha\,,$$

qui est appellé symbole principal de P. On supposera dans ce qui suit que P_0 ne prend que des valeurs réelles.

Le but est de décrire les (des) solutions de

$$P_h u_h = O(h^\infty)\,.$$

EXEMPLE 4.4.

$$P = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E,\ \ P_0 = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x) - E\,,$$

(valeurs propres de Schrödinger).

$$\frac{h}{i}\frac{du}{dt} = -\frac{h^2}{2}\Delta u + Vu,\ \ P_0 = \tau - H(x, \xi)\,,$$

(Schrödinger dépendant du temps).

$$\lambda^{-2}\Delta_g - 1,\ \ P_0 = g^\star(x, \xi) - 1\,,$$

(grandes valeurs propres du laplacien).

LES SOLUTIONS BKW

On considère l'action de P sur une fonction oscillante et on développe en puissances de h :

$$P(a(x)e^{iS(x)/h}) = e^{iS(x)/h}\big(P_0(x, S'(x))a(x) + \frac{h}{i}\big(\mathcal{X}a(x) + P_1(x, S'(x))a(x)\big) + O(h^2)\big)$$

où $\mathcal{X} = \sum \partial_{\xi_i} P_0(x, S'(x))\partial_{x_i}$ et $P_1(x, \xi)$, le *symbole sous-principal* de P, est une fonction sur $T^\star X$.

Résoudre $P(ae^{iS/h}) = O(h^2)$ équivaut donc à résoudre l'équation eiconale $P_0(x, S'(x)) = 0$, puis une équation différentielle le long des trajectoires de $\mathcal{X}$. Ces deux opérations gardent un sens pour les solutions généralisées, en particulier, $\mathcal{X}$ est la projection sur X de $\mathcal{X}_{P_0}$ et donc on peut lire les équations de transport sur la variété lagrangienne.

Dans le cas de Schrödinger, l'équation de transport s'écrit:

$$\mathcal{X}a + \frac{1}{2}\Delta S a = 0\,.$$

Elle s'interprète géométriquement comme l'invariance par le flot hamiltonien de la demi-densité $a(x)|dx|^{1/2}$. Le carré $a(x)^2|dx|$ s'interprète bien en mécanique quantique comme une mesure: la probabilité de présence de la particule.

Pour mettre tout cela en place, on associe, à la représentation de L à partir d'une famille de fonctions, des superpositions de fonctions oscillantes

$$f(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)/h} a(x,\theta) d\theta\,.$$

EXEMPLE 4.5 (LA FONCTION DE AIRY). *On définit*

$$Ai_h(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} e^{i(x\xi - \frac{\xi^3}{3})/h} d\xi = h^{-1/6} Ai(xh^{-2/3})\,.$$

Cette fonction est associée à la variété lagrangienne

$$x = \xi^2$$

qui admet une caustique en $(0,0)$.

La fonction de Airy décrit en fait le comportement universel des intégrales oscillantes associées aux singularités plis.

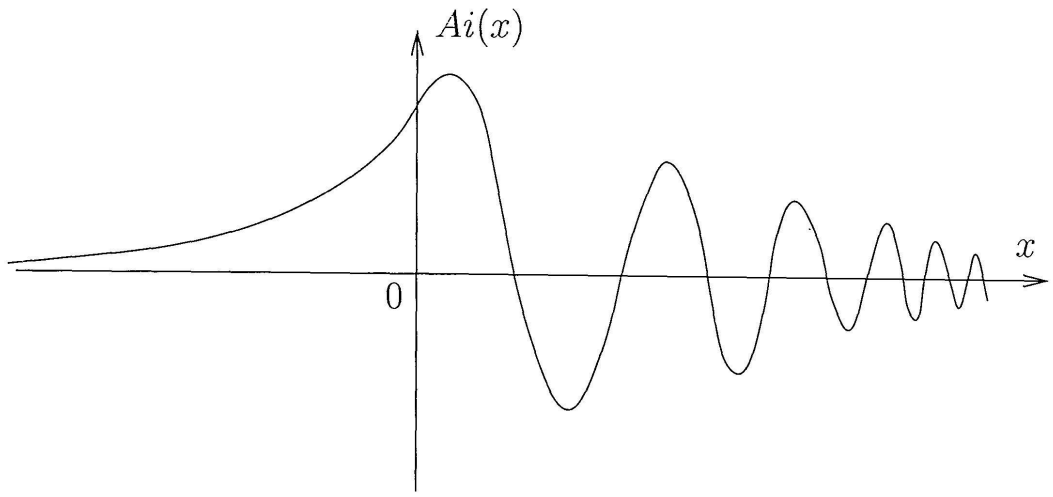

FIGURE 6

La fonction de Airy

Le résultat net est la possibilité d'associer à toute variété lagrangienne L vérifiant $(P_0)|_L = 0$ des solutions locales de $Pu = O(h^2)$ et même $O(h^\infty)$ si on réfléchit un peu.

Ces solutions ne se globalisent pas toujours : ce sont les conditions de quantification.

Dans les cas les plus simples, par exemple dans les exemples 4.6 et 4.7, il s'agit d'une condition portant uniquement sur L : la classe de cohomologie de de Rham de la forme de Liouville $\alpha = \xi dx$ satisfait des conditions d'intégralité du type

$$[\alpha] \in 2\pi h(\mathbf{Z}^n + \mu),$$

où $\mu \in \frac{1}{4}\mathbf{Z}^n$ est l'*indice de Maslov*.

En effet, une fois l'existence d'une densité invariante assurée, il reste le problème des phases qui sont données localement par S dont la différentielle est la restriction à L de α (on retrouve la définition des fronts d'ondes comme feuilles de phases constantes). La contribution des caustiques est donnée par l'indice de Maslov qui a son origine technique dans la phase stationnaire.

EXEMPLE 4.6 (LES SÉRIES DE FOURIER). *On considère l'opérateur $\frac{h}{i}\partial_x$ sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Son symbole principal est ξ et la condition de quantification sur la variété $\xi = a$ est*

$$2\pi a = 2\pi hn,$$

soit $a = hn$. On retrouve comme spectre les hn, $n \in \mathbf{Z}$ et les séries de Fourier.

EXEMPLE 4.7 (L'OSCILLATEUR HARMONIQUE).

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2).$$

Le symbole principal est

$$\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$$

et les conditions de quantification s'écrivent pour la variété $H = E$:

$$2\pi E = 2\pi h(n + \frac{1}{2}).$$

Elles donnent le spectre exact :

$$E_n = h(n + \frac{1}{2}).$$

Cela n'est pas surprenant, car le changement $x = \sqrt{h}x_1$ transforme $\widehat{H}_h$ en $h\widehat{H}_1$.

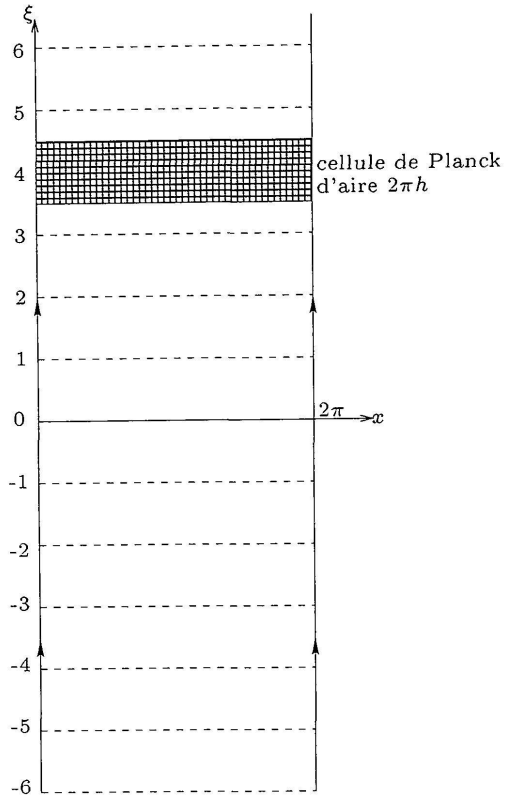

FIGURE 7

L'espace de phase des séries de Fourier

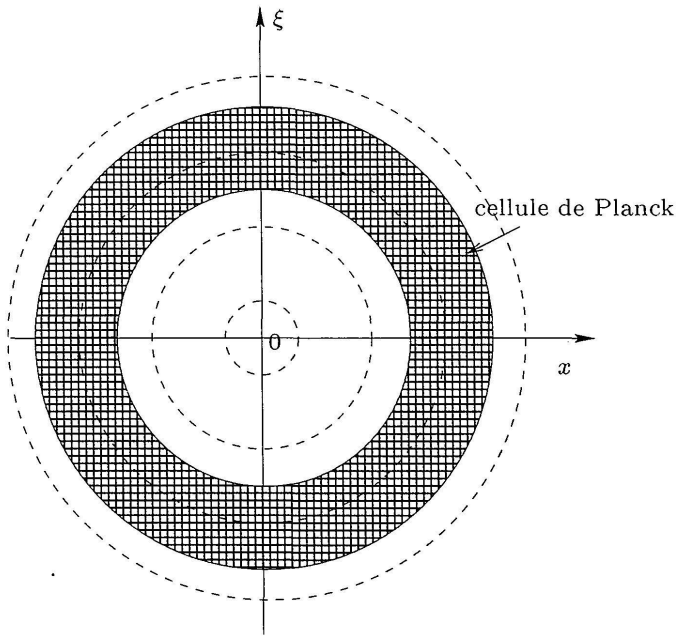

FIGURE 8

L'espace des phases de l'oscillateur harmonique