5. Le spectre semi-classique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4.4 Le cas de Schrödinger et l'intégrale de Feynman

Voir [27], [13].

Dans le cas de Schrödinger dépendant du temps, on obtient une représentation à la Feynman :

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{t,x,y}} e^{i\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds/h} d\gamma\,.$$

Bien sûr, cette intégrale n'a pas de statut mathématique bien solide, contrairement à la mesure de Wiener. On doit comprendre $d\gamma$ comme une mesure de Lebesgue.

5. Le spectre semi-classique

5.1 La formule de Weyl

Voir [8], [32].

On considère le spectre de l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbf{R}^n$

$$\widehat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E\,,$$

où on suppose V C^∞ et $\liminf_{x\to\infty} V \geq 0$. Alors le spectre négatif de $\widehat{H}$ est discret; on l'écrit :

$$E_1(h) < E_2(h) \leq \cdots\ .$$

Si $E < 0$, on considère le comportement asymptotique semi-classique de

$$N_h(E) = \#\{j \mid E_j(h) \leq E\}\,.$$

Il se trouve que l'asymptotique de $N_h(E)$ est purement classique

$$N_h(E) \sim (\frac{1}{2\pi h})^n \operatorname{vol}(\{P_0(x,\xi) \leq E\})\,,$$

ce qui signifie que chaque état propre *occupe* une région de volume $(2\pi h)^{n/2}$ de l'espace des phases. C'est une des versions de la correspondance entre volume et dimension. Cela permet parfois de déterminer le $\hbar$ effectif d'un problème de type semi-classique.

De nombreux auteurs se sont préoccupés d'obtenir des estimations du reste du type

$$N_h(E) = Ch^{-n}(1 + O(h^\alpha))\ .$$

La meilleure estimation générale ($\alpha = 1$) dans le cas où E n'est pas valeur critique de $H(x, \xi)$ est celle de Hörmander ([35]). Cette estimation a été améliorée par Duistermaat et Guillemin [23] en un $o(h)$ dans le cas (générique) où l'ensemble des trajectoires périodiques est de mesure nulle et Bérard ([7]) a montré que, dans le cas riemannien sans points conjugués, on peut améliorer le reste en $O(h/|\ln h|)$.

Cette asymptotique n'est pas vraie pour un hamiltonien arbitraire, en particulier elle est incorrecte dans le cas des bouteilles magnétiques : la vraie asymptotique est donné par le nombre de pavés d'un pavage par des images de cubes standards par des plongements canoniques (voir [14]).

5.2 Le spectre dans le cas complètement intégrable : coordonnées actions-angles semi-classiques

Voir [16], [17], [18].

Du point de vue classique, un flot hamiltonien est dit complètement intégrable si l'espace des phases admet (presque partout) un feuilletage lagrangien en tores invariants par le flot hamiltonien. Cela correspond donc à un hamiltonien sur le tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ de la forme $H(\xi)$.

L'hamiltonien quantique naturellement associé est donc

$$\widehat{H} = H(\frac{h}{i}\partial_x)$$

dont le spectre est formé des points

$$H(2\pi hp), \ p \in \mathbf{Z}^n .$$

On peut retrouver ce spectre au moyen des conditions de quantification

$$[\alpha] \in 2\pi h\mathbf{Z}^n .$$

En fait, il faut introduire les corrections des indices de Maslov, ce qui correspond à remplacer $\mathbf{Z}^n$ par un translaté $\mu + \mathbf{Z}^n$.

Tout ceci peut se justifier rigoureusement.

L'analyse précise des singularités du système complètement intégrable nécessite l'introduction de conditions de quantification modifiées que nous avons traitées avec Bernard Parisse en dimension 1 ([20] et [21]) et que San Ngoc Vu est en train de traiter en toute généralité. Ces travaux permettent de décrire pour un système complètement intégrable avec singularités de Morse l'asymptotique semi-classique de *toutes* les valeurs propres.

En particulier, dans le cas d'un double puits de potentiel pair en dimension 1, nous avons décrit avec Bernard Parisse la transition du spectre près

de l'énergie correspondant au maximum local V_0 du potentiel : il s'agit d'une transition (universelle) entre les doublets de parité

$$\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k} \leq \lambda_{2k-1} + O(e^{-C/h}),$$

($\lambda_{2k} \ll V_0$) et les valeurs propres régulièrement espacées pour $\lambda_k \gg V_0$.

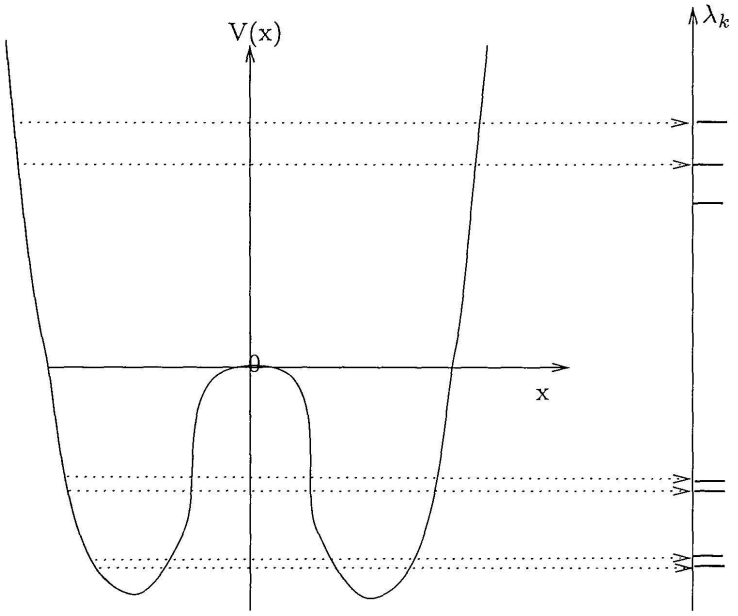

FIGURE 9
Le spectre du double puits symétrique

Cette approche est encore valable dans le cadre de la théorie KAM (cf. [16]) de 2 façons différentes :

– pour décrire le spectre semi-classique d'un sytème hamiltonien proche d'un système intégrable ;

– en considérant le cas où le système est classiquement complètement intégrable et non quantiquement complètement intégrable comme une *perturbation d'un système complètement intégrable.*

Ce dernier cas se rencontre par exemple pour l'étude des grandes valeurs propres de $\Delta + V$ où Δ est le laplacien plat sur le tore (intégrable quantiquement par les séries de Fourier) et V en est une petite perturbation à la limite des grandes valeurs propres.