Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE
Autor: Colin de Verdière, Yves
Kapitel: 5.1 La formule de Weyl
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4.4 Le cas de Schrödinger et l'intégrale de Feynman

Voir [27], [13].

Dans le cas de Schrödinger dépendant du temps, on obtient une représentation à la Feynman :

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{t,x,y}} e^{i\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds/h} d\gamma\,.$$

Bien sûr, cette intégrale n'a pas de statut mathématique bien solide, contrairement à la mesure de Wiener. On doit comprendre $d\gamma$ comme une mesure de Lebesgue.

5. Le spectre semi-classique

5.1 La formule de Weyl

Voir [8], [32].

On considère le spectre de l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbf{R}^n$

$$\widehat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E\,,$$

où on suppose V C^∞ et $\liminf_{x\to\infty} V \geq 0$. Alors le spectre négatif de $\widehat{H}$ est discret; on l'écrit :

$$E_1(h) < E_2(h) \leq \cdots\ .$$

Si $E < 0$, on considère le comportement asymptotique semi-classique de

$$N_h(E) = \#\{j \mid E_j(h) \leq E\}\,.$$

Il se trouve que l'asymptotique de $N_h(E)$ est purement classique

$$N_h(E) \sim (\frac{1}{2\pi h})^n \operatorname{vol}(\{P_0(x,\xi) \leq E\})\,,$$

ce qui signifie que chaque état propre *occupe* une région de volume $(2\pi h)^{n/2}$ de l'espace des phases. C'est une des versions de la correspondance entre volume et dimension. Cela permet parfois de déterminer le $\hbar$ effectif d'un problème de type semi-classique.

De nombreux auteurs se sont préoccupés d'obtenir des estimations du reste du type

$$N_h(E) = Ch^{-n}(1 + O(h^\alpha))\ .$$

La meilleure estimation générale ($\alpha = 1$) dans le cas où E n'est pas valeur critique de $H(x, \xi)$ est celle de Hörmander ([35]). Cette estimation a été améliorée par Duistermaat et Guillemin [23] en un $o(h)$ dans le cas (générique) où l'ensemble des trajectoires périodiques est de mesure nulle et Bérard ([7]) a montré que, dans le cas riemannien sans points conjugués, on peut améliorer le reste en $O(h/|\ln h|)$.

Cette asymptotique n'est pas vraie pour un hamiltonien arbitraire, en particulier elle est incorrecte dans le cas des bouteilles magnétiques : la vraie asymptotique est donné par le nombre de pavés d'un pavage par des images de cubes standards par des plongements canoniques (voir [14]).

5.2 Le spectre dans le cas complètement intégrable : coordonnées actions-angles semi-classiques

Voir [16], [17], [18].

Du point de vue classique, un flot hamiltonien est dit complètement intégrable si l'espace des phases admet (presque partout) un feuilletage lagrangien en tores invariants par le flot hamiltonien. Cela correspond donc à un hamiltonien sur le tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ de la forme $H(\xi)$.

L'hamiltonien quantique naturellement associé est donc

$$\widehat{H} = H(\frac{h}{i}\partial_x)$$

dont le spectre est formé des points

$$H(2\pi hp), \ p \in \mathbf{Z}^n .$$

On peut retrouver ce spectre au moyen des conditions de quantification

$$[\alpha] \in 2\pi h\mathbf{Z}^n .$$

En fait, il faut introduire les corrections des indices de Maslov, ce qui correspond à remplacer $\mathbf{Z}^n$ par un translaté $\mu + \mathbf{Z}^n$.

Tout ceci peut se justifier rigoureusement.

L'analyse précise des singularités du système complètement intégrable nécessite l'introduction de conditions de quantification modifiées que nous avons traitées avec Bernard Parisse en dimension 1 ([20] et [21]) et que San Ngoc Vu est en train de traiter en toute généralité. Ces travaux permettent de décrire pour un système complètement intégrable avec singularités de Morse l'asymptotique semi-classique de *toutes* les valeurs propres.

En particulier, dans le cas d'un double puits de potentiel pair en dimension 1, nous avons décrit avec Bernard Parisse la transition du spectre près