**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 44 (1998)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE
**Autor:** Colin de Verdière, Yves
**Kapitel:** 6.3 La formule des traces semi-classiques
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-63894

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 30.06.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

## 6.3 La formule des traces semi-classiques

Cette formule s'étend en une formule asymptotique (appellée formule de traces de Gutzwiller dans la littérature) valable en toute généralité (en particulier sans aucune hypothèse de type chaos classique, le cas complètement intégrable étant une conséquence de la formule sommatoire de Poisson) à condition de prendre $\rho$ telle que $\hat{\rho}$ soit à support compact, ce qui revient à ne considérer la dynamique de l'équation de Schrödinger que sur un intervalle borné en temps et donc une contribution d'un nombre fini de géodésiques périodiques, en vertu de la formule d'inversion de Fourier :

$$\frac{1}{h}\rho\Big(\frac{E-\widehat{H}}{h}\Big) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbf{R}} e^{itE/h}e^{-it\widehat{H}/h}\widehat{\rho}(t)\,dt\,.$$

Donnons un énoncé assez précis pour l'équation de Schrödinger.

Théorème 1. *Soit $E$ une énergie non critique pour l'hamiltonien classique $H$, $\chi \in C_o^\infty(\mathbf{R})$ égale à 1 près de $E$ et $\rho(E)$ une fonction dont la transformée de Fourier est à support dans $|t| < T$.*

*On suppose que les trajectoires périodiques $\gamma$ de $\mathcal{X}_H$ contenues dans $\{H = E\}$ sont* non dégénérées *au sens que l'application de Poincaré linéaire $P_\gamma$ n'admet pas* 1 *comme valeur propre. Soit $T'_\gamma > 0$ la plus petite période de $\gamma$ et $m_\gamma$ l'indice de Morse de $\gamma$ comme courbe fermée et $\epsilon_\gamma = O$ ou* 1.

*Alors :*

$$\sum_j \chi(E_j)\frac{1}{h}\rho\Big(\frac{E-E_j}{h}\Big) = N_W(E) + \sum_\gamma N_\gamma(E)\,, \tag{6.1}$$

*où*

$$N_W(E) = C(E)h^{-(n-1)}(1+O(h)) \tag{6.2}$$

*et*

$$N_\gamma(E) = \frac{1}{2\pi h}\frac{T'_\gamma}{(\det(1-P_\gamma))^{1/2}}e^{\frac{i}{h}\int_\gamma \xi dx - i(m_\gamma+\epsilon)\frac{\pi}{2}}(1+O(h))\,. \tag{6.3}$$

La justification heuristique la plus simple est liée à l'intégrale de Feynman ; donnons-la : le propagateur quantique

$$p(t,x,y)$$

noyau intégral de l'opérateur $U(t) = e^{-it\widehat{H}/\hbar}$ est donné selon Feynman ([27]) comme une superposition d'amplitudes associées aux différents

chemins $\gamma \in \Omega_{x,y,t}$ qui est l'ensemble de chemins ($\gamma\colon [0,t] \to X$ tels que $\gamma(0) = x,\ \gamma(t) = y$):

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{x,y,t}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds} |d\gamma|\,,$$

où $\mathcal{L}\colon TX \to \mathbf{R}$ est le lagrangien classique. Dans le cas des géodésiques, le lagrangien est l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\|\gamma'\|^2$.

Si $\Omega_t$ désigne maintenant l'espace des lacets fermés parcouru en le temps $t$, on obtient la fonction de partition quantique:

$$Z(t) = \sum e^{-itE_j/\hbar} = \int_X p(t,x,x)dx = \int_{\Omega_t} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds} |d\gamma|\,,$$

comme une intégrale sur les *lacets*. L'application de la phase stationnaire, lorsque $\hbar$ tend vers 0, fait apparaitre les trajectoires fermées comme points critiques de $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds$ sur $\Omega_t$.

Dans le cas de Selberg, il se trouve que, bien que la surface $X$ puisse être compliquée, l'espace $\Omega_t$ se décompose en composantes connexes simples, une par géodésique périodique et que la décomposition de $Z(t)$ en somme d'intégrales sur ces composantes connexes permet de prévoir une formule sommatoire exacte.

La formule de traces semi-classiques donne certes des informations sur le spectre, mais elle a surtout une application aux problèmes inverses. Par exemple dans le cas riemannien, elle montre que le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs des géodésiques périodiques.

*La fonction $\zeta$ de Riemann:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1,$$

s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant des zéros aux entiers pairs $< 0$. Riemann a fait l'hypothèse selon laquelle les autres zéros satisfont $\Re(s) = 1/2$. Cette hypothèse centrale en théorie des nombres est restée improuvée depuis environ 150 ans.

Il existe des formules sommatoires ayant une analogie formelle avec celle de Selberg pour ces zéros. A. Connes [22] vient de proposer un hamiltonien quantique dont le spectre serait donné par ces zéros et ainsi une voie d'attaque de l'hypothèse de Riemann.