Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE
Autor: Colin de Verdière, Yves
Kapitel: 7. Statistiques spectrales
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

7. Statistiques spectrales

Pour ceci, voir [9], [25], [41], [45], [46].

Il s'agit d'exprimer des propriétés de nature statistique d'une suite (infinie) de nombres.

Soit $E_1 \leq E_2 \leq \cdots \leq E_N < \cdots$ une suite infinie de nombres réels vérifiant la condition asymptotique suivante :

$$(\star) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{E_N}{N} = 1 .$$

On peut alors introduire plusieurs invariants statistiques, les plus simples étant :

– la distribution du plus proche voisin $p(s)$,

– l'écart quadratique par rapport à loi uniforme sur un intervalle de test de longueur l, $\Sigma^2(l)$ qui mesure la rigidité du spectre.

Par exemple, on peut poser (en supposant que ces limites existent) :

$$p(s)\,ds = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\{p \leq N \mid s \leq E_{p+1} - E_p \leq s + ds\}}{N} .$$

Et de même :

$$\Sigma^2(l) = \lim_{E \to \infty} (\#\{p \mid E \leq E_p \leq E + l\} - l)^2 .$$

$p(s)$ mesure donc la statistique des écarts de niveaux, alors que $\Sigma^2(l)$ mesure la rigidité : $\Sigma^2(l)$ petit signifie que la suite est presque une suite arithmétique.

Si on a un vrai spectre, la condition $(\star)$ n'est pas satisfaite en général, mais les asymptotiques de type Weyl permettent un reparamétrage du spectre par une fonction puissance

$$E'_N = cE_N^\alpha$$

de façon à ce que $(\star)$ soit satisfaite.

Des exemples : la distribution de Poisson consiste à prendre N points répartis de façon équiprobable dans un intervalle de longueur N et la limite quand N tend vers l'infini. Il est bien connu qu'on a alors :

$$p(s) = e^{-s} .$$

De même, on montre que

$$\Sigma^2(l) = l .$$

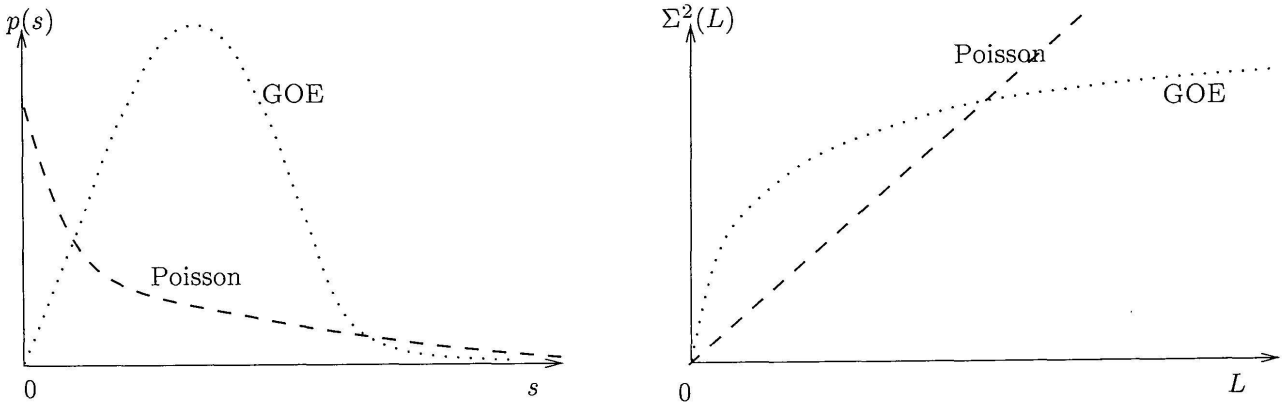

FIGURE 11
Les statistiques spectrales : Poisson et GOE

Les spectres génériques ne sont pas poissonniens, ne serait-ce qu'à cause de la répulsion des niveaux. Il est connu depuis Wigner et von Neumann (~ 1930) que la condition $\lambda_p = \lambda_{p+1}$ définit un sous-ensemble de codimension 2 de l'espace des opérateurs symétriques. On s'attend donc à : $p(0) = 0$ pour un hamiltonien quantique générique. Cette répulsion de niveaux n'est pas satisfaite dans les cas complètement intégrables ; par exemple le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ a toutes ses valeurs propres dégénérées ! Mais le cas complètement intégrable est *atypique* comme on le sait depuis Poincaré.

GOE : Décrivons brièvement la théorie GOE. On considère des ensembles (au sens de la thermodynamique) de matrices symétriques $N \times N$ dont les éléments $a_{i,j}$, $i \leq j$ sont des variables aléatoires normales indépendantes de même loi. On s'intéresse alors aux statistiques spectrales lorsque $N \to \infty$. On montre que le spectre se répartit dans un intervalle $(-c\sqrt{N}, c\sqrt{N})$ avec donc un écart moyen $2c/\sqrt{N}$. On renormalise en considérant $\lambda'_n = \frac{\sqrt{n}}{2c}\lambda_n$ et on peut alors calculer les limites thermodynamiques des statistiques spectrales. Le livre de Mehta [41] en donne un exposé détaillé.

$p(s)$ est proche d'une courbe $ase^{-s^2/b}$ suggérée par Wigner.

$$\Sigma^2(l) = \frac{2}{\pi^2} \ln l + o(1), \quad l \to \infty .$$

GUE : De même si on s'intéresse aux matrices hermitiennes on obtient les statistiques GUE.

Des expériences numériques :

On s'attend donc, et cela a été explicitement proposé par des physiciens d'Orsay ([9]) dès 1984, à ce qu'à un flot géodésique chaotique corresponde une statistique de type GOE pour le spectre.

Les résultats numériques sont curieux : cela marche pour le stade ou le billard de Sinaï (tore de dimension 2 privé d'un disque), mais les expériences menées sur certains triangles géodésiques du disque de Poincaré dont la dynamique classique a les mêmes propriétés que celles décrites plus haut semblent montrer une dichotomie entre les triangles qui permettent de paver H, par exemple les angles $(\pi/2, \pi/3, \pi/7)$ et plus généralement l'infinité de possibilités

$$(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}) \ , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \, ,$$

pour lesquels GOE ne marche pas et ceux qui ne pavent pas, par exemple $(\pi/2, \pi/3, 2\pi/15)$, pour lesquels GOE était vérifiée.

Cette dichotomie n'était pas la bonne comme l'ont vu il y a quelques années E. Bogomolny, B. Georgeot et M.-J. Giannoni.

Il se trouve que, parmi les triangles (une infinité) qui pavent H, un certain nombre fini dont la liste est connue correspondent à des sous-groupes dits *arithmétiques* de $SL_2(\mathbf{R})$ et que ce sont ceux-là pour lesquels GOE n'est pas satisfaite. Je ne vais pas me lancer dans une définition précise des groupes arithmétiques, mais disons que l'arithméticité a comme conséquence une grande dégénérescence du spectre des longueurs des géodésiques périodiques. Cette dégénérescence est elle même reliée à une famille de symétries quantiques particulières, appellées correspondances de Hecke. Ces symétries supplémentaires, relativement cachées, font que ces hamiltoniens quantiques ne sont pas génériques ! Luo et Sarnak ([45]) ont démontré que GOE n'est effectivement pas satisfaite dans les cas arithmétiques.

Lorsque $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, H/Γ est l'espace des réseaux de $\mathbf{R}^2$ euclidien et si on définit, pour tout réseau z, $Y_n(z)$ comme l'ensemble des sous-réseaux d'indice n de z, les opérateurs $T_n\varphi(z) = \sum_{z' \in Y_n(z)} \varphi(z')$ commutent entre eux et avec Δ : ce sont les opérateurs de Hecke !

Les statistiques GUE sont utilisées lorsqu'il n'y a pas symétrie par inversion du temps (champs magnétiques). Montgomery a remarqué en 1973 que ces statistiques s'appliquent parfaitement aux zéros de la fonction ζ de Riemann, ce qui est cohérent avec l'approche proposée par Connes dans [22], voir aussi [37], [38].