SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE T^5

Autor(en): **Hadjar, Amine**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-63898

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 91–93

SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE $\mathbf{T}^5$

par Amine HADJAR *)

ABSTRACT. We give an example of a $\mathbf{T}^2$-invariant contact form on $\mathbf{T}^5$ which is transversal to the trivial fibration with circles over $\mathbf{T}^4$.

RÉSUMÉ. On donne un exemple de forme de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$, $\mathbf{T}^2$-invariante et transverse à la fibration triviale en cercles au dessus du tore $\mathbf{T}^4$.

D'après Y. Eliashberg et W. Thurston (voir [1]), on sait que sur tout fibré principal en cercles $M \to F$ au dessus d'une surface F de genre non nul, il existe une structure de contact transverse aux fibres [1]). Un exemple simple est le champ de plans défini par la forme différentielle $d\theta + \cos\theta\, d\theta_1 + \sin\theta\, d\theta_2$ sur le tore $\mathbf{T}^3$.

Ces auteurs posent le problème d'existence d'une telle structure en dimensions supérieures, et notamment sur le tore $\mathbf{T}^5$ fibré trivial au dessus de $\mathbf{T}^4$.

Dans cette note, on donne une réponse positive: on montre qu'il existe une forme de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$ qui est non seulement transverse aux fibres de la fibration triviale $\mathbf{T}^5 = S^1 \times \mathbf{T}^4 \to \mathbf{T}^4$, mais en plus $\mathbf{T}^2$-invariante. L'action de $\mathbf{T}^2$ considérée est celle du deuxième facteur dans $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^2$.

1. Le premier exemple de structure de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$ a été donné par R. Lutz (voir [2]). Il s'agit du champ de 4-plans défini par la forme

$$\omega_0 = (\sin\theta\, \cos\theta_2 - \sin\theta_1\, \sin\theta_2)\, d\theta_3 + (\sin\theta\, \sin\theta_2 + \sin\theta_1\, \cos\theta_2)\, d\theta_4 \\ + \sin\theta_1\, \cos\theta_1\, d\theta - \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta_1 + \cos\theta\, \cos\theta_1\, d\theta_2\,,$$

qui est $\mathbf{T}^2$-invariante puisque ses dérivées de Lie par rapport aux champs de vecteurs $\partial/\partial\theta_3$ et $\partial/\partial\theta_4$ sont nulles. Ici θ et les θ_i désignent les 5 coordonnées de $\mathbf{R}^5$.

*) Je remercie A. Haefliger pour les discussions fructueuses lors de sa visite à Mulhouse.

[1]) Ce problème est dû à E. Giroux.

2. Posons $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$, pour tout nombre réel t. Alors :

PROPOSITION. *Il existe un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour tout t, $|t| \leq \varepsilon$, la forme $\mathbf{T}^2$-invariante ω_t est de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. De plus, pour $1/2 < |t| \leq \varepsilon$, elle est transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$.*

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2\theta\,\cos^2\theta_1 + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\,\sin^2\theta_1 + \sin^4\theta_1 \\ &\qquad + t\cos\theta_1\,\sin\theta_1)\,d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t\sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6\sin^2\theta\,\sin^2\theta_1) \\ &\qquad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4\end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur $\mathbf{T}^5$ pour $|t| \leq 1$. La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour $|t| \leq \varepsilon$, la forme ω_t reste de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille ω_t, avec $0 \leq t \leq \varepsilon$, est une isotopie de formes de contact $\mathbf{T}^2$-invariantes sur $\mathbf{T}^5$, qui joint ω_0 à ω_ε. Par conséquent, il existe une isotopie φ_t de difféomorphismes $\mathbf{T}^2$-équivariants du tore $\mathbf{T}^5$ telle que φ_0 est l'identité et $\omega_t \wedge \varphi_t^\star\,\omega_0 = 0$ pour tout t dans $[0, \varepsilon]$ (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par ω_0 est transverse à la fibration en cercles $\mathbf{T}^5 \to \mathbf{T}^4$ dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs $(\varphi_1)_\star\,\partial/\partial\theta$. Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur $\mathbf{T}^5$ ne peut être $\mathbf{T}^3$-invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact ω sur le tore $\mathbf{T}^5$ ne peut être à la fois S^1-invariante (i.e. telle que $L_{\partial/\partial\theta}\,\omega = 0$) et partout transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$. Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit $M(B, S^1, q)$ un fibré principal dont la base est fermée, de dimension $2p$. Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur M, S^1-invariante et transverse aux fibres.*

Preuve. Soit Z le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de S^1 sur M. Supposons qu'il existe une forme de contact ω sur M, invariante par S^1 et transverse aux fibres. Alors $\alpha = \omega/\omega(Z)$ est une forme de connexion

telle que $\alpha(Z) = 1$ et $i(Z)d\alpha = 0$. La forme de courbure correspondante venant de la base, il existe une 2-forme Ω sur B telle que $d\alpha = q^\star\Omega$. Comme $\alpha \wedge (d\alpha)^p = \alpha \wedge q^\star(\Omega^p)$ est une forme volume sur M (puisque α est de contact), Ω^p est une forme volume sur B. Par suite, la classe de cohomologie de Ω est non nulle, ce qui contredit l'hypothèse de nullité sur la classe caractéristique du fibré.

RÉFÉRENCES

[1] ELIASHBERG, Y. and W. THURSTON. *Confoliations.* University Lecture Series, 13. Amer. Math. Soc. (1998).

[2] LUTZ, R. Sur la géométrie des structures de contact invariantes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29* (1979), 283–306.

(Reçu le 27 janvier 1998)

Amine Hadjar

Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
F-68093 Mulhouse Cedex
France
e-mail: A.Hadjar@univ-mulhouse.fr

vide-leer-empty