L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 91–93

SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE $\mathbf{T}^5$

par Amine HADJAR *)

ABSTRACT. We give an example of a $\mathbf{T}^2$-invariant contact form on $\mathbf{T}^5$ which is transversal to the trivial fibration with circles over $\mathbf{T}^4$.

RÉSUMÉ. On donne un exemple de forme de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$, $\mathbf{T}^2$-invariante et transverse à la fibration triviale en cercles au dessus du tore $\mathbf{T}^4$.

D'après Y. Eliashberg et W. Thurston (voir [1]), on sait que sur tout fibré principal en cercles $M \to F$ au dessus d'une surface F de genre non nul, il existe une structure de contact transverse aux fibres [1]). Un exemple simple est le champ de plans défini par la forme différentielle $d\theta + \cos\theta \, d\theta_1 + \sin\theta \, d\theta_2$ sur le tore $\mathbf{T}^3$.

Ces auteurs posent le problème d'existence d'une telle structure en dimensions supérieures, et notamment sur le tore $\mathbf{T}^5$ fibré trivial au dessus de $\mathbf{T}^4$.

Dans cette note, on donne une réponse positive: on montre qu'il existe une forme de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$ qui est non seulement transverse aux fibres de la fibration triviale $\mathbf{T}^5 = S^1 \times \mathbf{T}^4 \to \mathbf{T}^4$, mais en plus $\mathbf{T}^2$-invariante. L'action de $\mathbf{T}^2$ considérée est celle du deuxième facteur dans $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^2$.

1. Le premier exemple de structure de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$ a été donné par R. Lutz (voir [2]). Il s'agit du champ de 4-plans défini par la forme

$$\begin{aligned}\omega_0 = (\sin\theta \, \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \, \sin\theta_2)\, d\theta_3 + (\sin\theta \, \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \, \cos\theta_2)\, d\theta_4 \\ + \sin\theta_1 \, \cos\theta_1 \, d\theta - \sin\theta \, \cos\theta \, d\theta_1 + \cos\theta \, \cos\theta_1 \, d\theta_2 \,,\end{aligned}$$

qui est $\mathbf{T}^2$-invariante puisque ses dérivées de Lie par rapport aux champs de vecteurs $\partial/\partial\theta_3$ et $\partial/\partial\theta_4$ sont nulles. Ici θ et les θ_i désignent les 5 coordonnées de $\mathbf{R}^5$.

---

*) Je remercie A. Haefliger pour les discussions fructueuses lors de sa visite à Mulhouse.

1) Ce problème est dû à E. Giroux.