1. A THEOREM OF GROTHENDIECK

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. A THEOREM OF GROTHENDIECK

The following theorem is a special case of Grothendieck's theorems, and the proof can be found in [Mu] §5, [H] §3.12, or [EGA] III, §7.7.5, 7.9.4.

THEOREM 1.1. *Let $q\colon V \to T$ be a proper flat morphism of noetherian schemes and let $\mathcal{L}$ be an invertible sheaf on V. For each $t \in T$ denote the fiber $V \otimes_T \operatorname{spec}(k(t))$ of q at t by V_t, where $k(t)$ is the residue field of T at t. Denote the inverse image of $\mathcal{L}$ on V_t by $\mathcal{L}_t$.*

(a) *The function $t \mapsto \chi(\mathcal{L}_t) = \sum_i (-1)^i \dim_{k(t)} H^i(V_t, \mathcal{L}_t)$ is locally constant on T.*

(b) *For each i, the function $t \mapsto \dim_{k(t)} H^i(V_t, \mathcal{L}_t)$ on T is upper semicontinuous.*

(c) *If T is reduced and connected and if $t \mapsto \dim_{k(t)} H^i(V_t, \mathcal{L}_t)$ is a constant function on T, then $R^i q_* \mathcal{L}$ is a locally free sheaf on T and the map $R^i q_* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^i(V_t, \mathcal{L}_t)$ is an isomorphism.*

(d) *If $H^1(V_t, \mathcal{L}_t) = 0$ for all $t \in T$, then $R^1 q_* \mathcal{L} = 0$ and $q_* \mathcal{L}$ is a locally free sheaf. Moreover the formation of $q_* \mathcal{L}$ commutes with any base change.*

2. RELATIVE EFFECTIVE CARTIER DIVISORS

Let $q\colon X \to T$ be a morphism of noetherian schemes. A *relative effective Cartier divisor* on X/T is an effective Cartier divisor on X that is flat over T when regarded as a closed subscheme of X. When $T = \operatorname{spec}(R)$ is affine, a closed subscheme D of X is a relative effective Cartier divisor if and only if there exists an open affine covering $U_i = \operatorname{spec}(R_i)$ of X and $g_i \in R_i$ such that

(a) $D \cap U_i = \operatorname{spec}\big(R_i/(g_i)\big)$;

(b) g_i is not a zero divisor;

(c) $R_i/(g_i)$ is flat over R.

REMARK 2.1. Let D be an effective Cartier divisor on X/T, let $\mathcal{I}(D)$ be the sheaf of ideals defining D, and let $\mathcal{L}(D)$ be the invertible sheaf corresponding to D. We have $\mathcal{L}(D) = \mathcal{I}(D)^{-1}$. The inclusion $\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{O}_X$ induces $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{I}(D)^{-1} = \mathcal{L}(D)$, hence a section s_D of $\mathcal{L}(D)$.