# 2. L'ALGÈBRE M

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

## 2. L'ALGÈBRE $\mathcal{M}$

### DÉFINITION

Pour tout $x \geq 1$, soit $\mathcal{B}_x$ la tribu des boréliens de $[1,x]$ et soit $\mathcal{B} = \bigcup_{x\geq 1} \mathcal{B}_x$ l'ensemble des boréliens bornés de $[1,+\infty[$. On notera $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbf{C}$ dont la restriction à chaque tribu $\mathcal{B}_x$ est une mesure complexe (voir [14], chapitre 6). Dans la suite, les éléments de $\mathcal{M}$ seront appelés simplement mesures. A titre d'exemple, observons qu'on peut associer à toute fonction arithmétique $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ une mesure $\mu$ par la formule:

$$\mu = \sum_{n\geq 1} f(n)\,\delta_n\,,$$

où $\delta_a$, $a \geq 1$, désigne la masse de Dirac au point $a$.

A chaque mesure $\mu$ est associée[3]) sa "fonction sommatoire"

$$\alpha(x) := \mu([1,x]), \quad x \geq 1\,.$$

C'est une fonction complexe continue à droite, à variation bornée dans tout intervalle $[1,M]$, $M < +\infty$. La correspondance ainsi établie entre $\mathcal{M}$ et cette classe de fonctions est bijective. On écrit: $\mu = d\alpha$.

### LA CONVOLUTION DANS $\mathcal{M}$

Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, on définit leur produit de convolution $d\alpha * d\beta$ par la formule[4])

$$\int_E d\alpha * d\beta = \iint_{st\in E} d\alpha(s)d\beta(t)\,, \quad E \in \mathcal{B}\,.$$

On montre que cette définition a un sens et que $d\alpha * d\beta$ appartient à $\mathcal{M}$. Supposons, par exemple, que

$$d\alpha = \sum_{n\geq 1} f(n)\delta_n, \quad d\beta = \sum_{n\geq 1} g(n)\delta_n\,,$$

où $f$ et $g$ sont deux fonctions arithmétiques. Alors,

$$d\alpha * d\beta = \sum_{n\geq 1} h(n)\delta_n\,,$$

---

[3]) L'emploi de la lettre $\alpha$ ne doit mener à aucune confusion avec la notation des nombres entiers généralisés de Beurling $\alpha_n$.

[4]) Nous présentons ici la théorie multiplicative, en vue de son application au problème de Beurling. Il y a, bien entendu, une théorie additive isomorphe.

où

$$h(n) = f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right);$$

$h$ est le produit de convolution de Dirichlet des fonctions arithmétiques $f$ et $g$.

La proposition suivante indique comment effectuer des calculs de convolution.

PROPOSITION 1. *Soit $d\alpha$ et $d\beta$ des mesures et $f$ une fonction borélienne complexe sur $[1, +\infty[$ bornée et à support borné. On a:*

$$\int f(u) d\alpha * d\beta = \iint f(st) d\alpha(s) d\beta(t).$$

*En particulier, pour tout $x \geq 1$,*

$$\int_1^x d\alpha * d\beta = \int_1^x \alpha\left(\frac{x}{t}\right) d\beta(t) = \int_1^x \beta\left(\frac{x}{s}\right) d\alpha(s).$$

On notera $(d\alpha)^{*n}$ la puissance $n$-ème de convolution d'une mesure $d\alpha$.

PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{M}$

L'addition, la convolution et la multiplication par les scalaires confèrent à $\mathcal{M}$ une structure de $\mathbf{C}$-algèbre associative, commutative et unitaire (l'élément neutre étant $\delta = \delta_1$).

Cette algèbre est intègre[5]). Ce fait, non trivial, résulte facilement d'un important théorème de Titchmarsh (cf. [16], Theorem VII).

Il est facile de voir qu'un élément de $\mathcal{M}$ est inversible si et seulement si sa masse au point 1 est non nulle. $\mathcal{M}$ possède un unique idéal maximal:

$$\mathcal{M}_0 = \{d\alpha \in \mathcal{M},\ \alpha(1) = 0\}.$$

Diamond s'est intéressé aux dérivations de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire aux applications $\mathbf{C}$-linéaires $D\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telles que

$$D(\mu * \nu) = \mu * D(\nu) + D(\mu) * \nu$$

quelles que soient $\mu$ et $\nu$ dans $\mathcal{M}$.

---

[5]) On peut donc considérer le corps des fractions de $\mathcal{M}$. C'est le corps des «opérateurs de Mikusiński», base d'une présentation originale du calcul opératoriel. Dans [13], Mikusiński développe cette théorie, qui a des liens avec celle des distributions (cf. [15], p. 254).

THÉORÈME 8 (Diamond 1968, [6]). *Les dérivations de $\mathcal{M}$ sont les applications de la forme*

$$\mu \longmapsto \mu_0 * (\log t \,.\, \mu)\,,$$

*$\mu_0$ étant un élément fixé, arbitraire, de $\mathcal{M}$.*

On notera $L$ la dérivation fondamentale dans $\mathcal{M}$, à savoir la multiplication par la fonction $\log t$.

TRANSFORMATION DE MELLIN

Si $d\alpha$ appartient à $\mathcal{M}$, l'ensemble des nombres réels $\sigma$ tels que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^{-\sigma} d\alpha(t)$$

converge[6]), a une borne inférieure $\sigma_c$. La fonction

$$F(s) = \int_1^{+\infty} t^{-s} d\alpha(t)\,,$$

appelée transformée de Mellin de $d\alpha$, est alors définie et holomorphe dans le demi-plan $\Re(s) > \sigma_c$ ; elle peut éventuellement se prolonger analytiquement au-delà.

La propriété fondamentale de la transformation de Mellin est la suivante. Si

$$G(s) = \int_1^{+\infty} t^{-s} d\beta(t), \quad d\beta \in \mathcal{M}\,,$$

alors

$$H(s) := \int_1^{+\infty} t^{-s} d\alpha * d\beta(t) = F(s)G(s)$$

pour tout $s$ tel que les trois intégrales convergent, par exemple pour tout $s = \sigma + i\tau$ tel que

$$\int_1^{+\infty} t^{-\sigma} |d\alpha|(t) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} t^{-\sigma} |d\beta|(t) < +\infty\,.$$

Observons également que la transformée de Mellin de $L(d\alpha)$ est $-F'(s)$.

---

[6]) Nous entendons par là l'existence de la limite $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\sigma} d\alpha(t)$.

TOPOLOGIE

Pour tout $x \geq 1$, la relation

$$\|d\alpha\|_x := \int_1^x |d\alpha|, \quad d\alpha \in \mathcal{M},$$

définit une semi-norme sur $\mathcal{M}$. Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, la mesure $|d\alpha| * |d\beta| - |d\alpha * d\beta|$ est positive donc on a l'inégalité :

$$\|d\alpha * d\beta\|_x \leq \|d\alpha\|_x \|d\beta\|_x$$

qui montre que la famille de semi-normes $(\| \quad \|_x)_{x \geq 1}$ munit $\mathcal{M}$ d'une structure d'algèbre topologique. Cette algèbre est complète.

CALCUL FONCTIONNEL

L'emploi dans $\mathcal{M}$ des séries entières à coefficients complexes est fondé sur la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe, de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors*[7]*,*

(i) *$f(d\alpha) := \sum_{n \geq 0} a_n (d\alpha)^{*n}$ converge dans $\mathcal{M}$ si $|\alpha(1)| < \rho$ ;*

(ii) *la série $\sum_{n \geq 0} a_n (d\alpha)^{*n}$ diverge dans $\mathcal{M}$ si $|\alpha(1)| > \rho$ ;*

(iii) *$d\alpha \longmapsto f(d\alpha)$ est continue dans l'ouvert de $\mathcal{M}$ défini par*

$$|\alpha(1)| < \rho ;$$

(iv) *pour $d\alpha$ dans cet ouvert, on a $L(f(d\alpha)) = f'(d\alpha) * L(d\alpha)$.*

L'exponentielle

$$\exp(d\alpha) = e^{d\alpha} = \sum_{n \geq 0} \frac{(d\alpha)^{*n}}{n!}$$

est un exemple fondamental. Ses principales propriétés sont résumées dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *L'exponentielle est une fonction continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, vérifiant :*

(i) *$e^{d\alpha + d\beta} = e^{d\alpha} * e^{d\beta}$ pour $d\alpha$ et $d\beta$ dans $\mathcal{M}$ ;*

(ii) *$e^{d\alpha} = d\lambda \Longleftrightarrow d\lambda * L(d\alpha) = L(d\lambda)$ et $e^{\alpha(1)} = \lambda(1)$.*

---

[7]) $(d\alpha)^0 = \delta$

PROPOSITION 4. *Avec les notations du paragraphe 1, on a:*

$$dN = e^{d\Pi},$$

*où* $\Pi(x) := P(x) + \frac{1}{2}P(x^{1/2}) + \frac{1}{3}P(x^{1/3}) + \dots$

Cette proposition traduit l'identité eulérienne formelle:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n^s} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-\frac{1}{\beta_n^s}} = \exp \sum_{n\geq 1,\, k\geq 1} \frac{1}{k\beta_n^{ks}}.$$

Ainsi, la théorie de Beurling ressortit à l'étude de l'exponentielle et du logarithme dans l'algèbre de mesures $\mathcal{M}$.

FORMULAIRE

Nous donnons ci-dessous une liste de propriétés d'usage constant pour le calcul dans $\mathcal{M}$.

1. La multiplication par $t^r$ est pour tout nombre complexe $r$ un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}$. En particulier, pour toute série entière $f(z)$, on a
$$t^r f(d\alpha) = f(t^r d\alpha).$$
2. $d\alpha * \frac{dt}{t} = \alpha(t)\frac{dt}{t}$.
3. $(dt)^{*n} = \dfrac{(\log t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$.
4. $(\delta + dt) * (\delta - \dfrac{dt}{t}) = \delta$.
5. $\delta + dt = e^{d\tau}$, où
$$\tau(x) := \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{\log t}.$$

## 3. LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE REVISITÉE

Si $d\alpha * d\beta = d\gamma$, on a

$$\gamma(x) = \int_{1\leq st\leq x} d\alpha(s)d\beta(t) = \int_1^x \beta\left(\frac{x}{s}\right)d\alpha(s) = \int_1^x \alpha\left(\frac{x}{t}\right)d\beta(t)$$
$$= \int_1^y \beta\left(\frac{x}{s}\right)d\alpha(s) + \int_1^{x/y} \alpha\left(\frac{x}{t}\right)d\beta(t) - \alpha(y)\beta\left(\frac{x}{y}\right)$$

pour tout $x$ et tout $y$ tels que $1 \leq y \leq x$.